

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Série N° 2
Cinématique et Dynamique du Point Matériel

EXERCICE : MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE PARABOLE

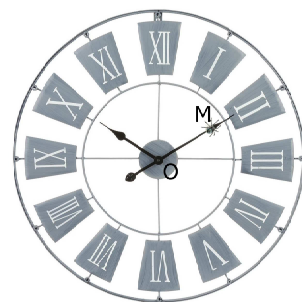
Un point matériel M décrit la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par $\rho \cos^2(\frac{\varphi}{2}) = \rho_0$ où ρ_0 est une constante et $\varphi \in [-\pi, +\pi]$.

1. Montrer que la trajectoire de M est une parabole et tracer son allure.
2. On suppose que le module de la vitesse est toujours proportionnel à ρ : $\|\vec{V}\| = k\rho$, où k est une constante positive.
 - i- Etablir les expressions des composantes radiale V_r et orthoradiale V_\perp du vecteur vitesse de M .
 - ii- Déterminer la loi du mouvement $\varphi(t)$ en supposant que φ est nulle à l'instant initial $t = 0$ et que φ croît avec le temps.

On donne $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \text{Log} \left| \text{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.

EXERCICE : SPIRALE D'ARCHIMÈDE

Une araignée M est située au centre d'une horloge murale O . A l'instant où l'aiguille des secondes passe par le chiffre III du cadran de l'horloge ($t = 0$), voir figure ci-contre, l'araignée se dirige vers l'extrémité de cette aiguille en se déplaçant à une vitesse constante $v = 10/3 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La longueur de l'aiguille est de 2m. On note par $\omega = 2\pi/60 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ le module de la vitesse angulaire de rotation de l'aiguille des secondes.



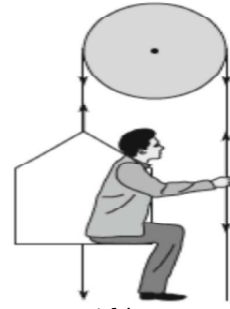
1. On étudie le mouvement de l'araignée par rapport à l'aiguille.
 - 1.a Définir un référentiel de travail $\mathcal{R}_1(O, x_1, y_1, z_1)$, choisir le système de coordonnées le mieux approprié et préciser la base des vecteurs unitaires associée.
 - 1.b Quelle est la nature de mouvement dans ce cas ? Au bout de combien de temps l'araignée aura-t-elle atteint l'extrémité de l'aiguille ?
2. On cherche maintenant à déterminer la nature de la trajectoire de l'araignée par rapport à un observateur situé aux pieds de l'horloge.
 - 2.a Définir un référentiel de travail $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, choisir le système de coordonnées le mieux approprié et préciser la base de vecteurs unitaires associée et son vecteur rotation par rapport à \mathcal{R} en fonction de ω .
 - 2.b Etablir les expressions de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ en fonction de v et de ω . En déduire leurs expressions numériques.
 - 2.c Retrouver ce résultat en considérant \mathcal{R} comme repère absolu et \mathcal{R}_1 comme repère relatif.
3. On cherche à représenter graphiquement la trajectoire de l'araignée.
 - 3.a Calculer les composantes de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ pour $t = 15\text{s}$, $t = 30\text{s}$, $t = 45\text{s}$ et $t = 60\text{s}$ dans la base choisie.
 - 3.b Représenter à l'échelle sur un graphique les positions et les vecteurs vitesses aux instants $t = 0, 15, 30, 45$ et 60 (s). On prendra comme échelle 1cm pour $0.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. En déduire la forme de la trajectoire obtenue.¹

EXERCICE : PEINTRE DE FAÇADE DE BATIMENT

1. La trajectoire obtenue est une spirale d'Archimède dont l'équation générale est $\rho = a + b\varphi$ où a et b sont des constantes.

Un peintre en bâtiment de masse $M = 90\text{Kg}$ est assis sur une chaise, de masse $m = 15\text{kg}$, suspendue à une corde inextensible reliée à une poulie parfaite^a, voir figure ci-contre. Le peintre exerce une force de 680N sur la corde pour faire monter la chaise le long de la façade du bâtiment.

^a. Les tensions de la corde de part et d'autre de la poulie sont égales en module.



On considère le système (S) formé par le peintre et la chaise et que l'on peut considérer comme un point matériel de masse $M + m$. Le mouvement a lieu dans le plan Oxz et Oz est la verticale ascendante. La figure illustre les différentes forces mises en jeu. Le repère lié à la surface de la terre peut être considéré comme galiléen, que l'on note $\mathcal{R}(O, xyz)$, muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer l'accélération du système (S) . Commenter le signe.
2. Quelle force exerce le peintre sur la chaise ?
3. Quelle quantité de peinture peut-il faire monter sur la chaise avec lui.

EXERCICE : CHAMP DE PESANTEUR TERRESTRE

Considérons un point matériel M , de masse m , suspendu à un fil de longueur l en équilibre dans le référentiel Terrestre $\mathcal{R}(O, xyz)$. Soit $T = \frac{2\pi}{\Omega_T}$ la période de rotation de la Terre sur elle même. On considère que M est soumise à la seule gravitation de la Terre, $\vec{F} = -\frac{K_G M_T m}{\|\vec{CM}\|^3} \vec{CM}$, où C est le centre de la Terre. Les notations du cours étant utilisées. La latitude de M est λ .

1. Montrer que le référentiel géocentrique peut être considéré galiléen. Etablir l'accélération d'entraînement et celle de Coriolis du mouvement de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_g .
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel Terrestre \mathcal{R} et déduire l'expression de la tension du fil \vec{T} .
3. Le poids \vec{P} de M étant défini de telle sorte que $\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{T}$. En déduire que l'expression du champ de pesanteur $\vec{g}(M)$.
4. l étant négligeable devant R_T , montrer que le champ de pesanteur est donné alors par

$$g(M) = -\frac{K_G M_T}{R_T^2} + \Omega^2 R_T \cos \lambda.$$

Conclure.

5. Comparer les champs de gravitation qu'exercent le Soleil, la Lune et la Terre sur un corps situé à la surface Terrestre.

On donne $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ et $d_{TS} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, respectivement la masse du Soleil et sa distance au centre de la Terre, $M_L = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ et $d_{TL} = 384 \cdot 10^3 \text{ km}$ la masse de la Lune et sa distance au centre de la Terre. $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $R_T = 6370 \text{ km}$ sont respectivement la masse et le rayon de la Terre. On donne $K_G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.}$ On considère que le point M est à la latitude de Marrakech $\lambda = 31.62^\circ$.

On néglige l'altitude du point M devant le rayon de la Terre R_T .