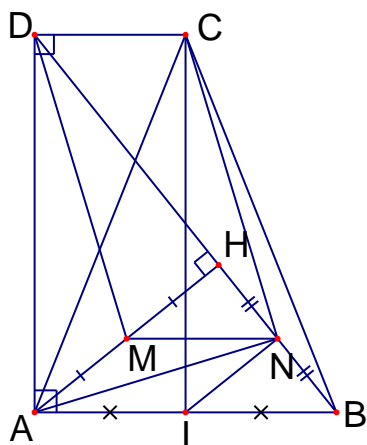


**Bài 1:**

Cho hình thang vuông ABCD (vuông tại A và D) với đáy lớn AB có độ dài gấp đôi đáy nhỏ DC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HA, HB và I là trung điểm của AB.

1. Chứng minh:  $MN \perp AD$  và  $DM \perp AN$ .
2. Chứng minh: các điểm A, I, N, C, D nằm trên cùng một đường tròn.
3. Chứng minh:  $AN \cdot BD = 2DC \cdot AC$ .

**Giải:**



1.  $\triangle HAB$  có  $MH = MA$  (gt),  $NH = NB$  (gt)

$\Rightarrow MN$  là đường trung bình của  $\triangle HAB \Rightarrow MN \parallel AB$

Mà  $AD \perp AB$  (vì  $A = 90^\circ$ )  $\Rightarrow MN \perp AD$ .

$\triangle ADN$  có  $MN \perp AD$  (chứng minh trên),  $AH \perp BD$  (gt)

$\Rightarrow NM$  và  $AH$  là hai đường cao của  $\triangle ADN \Rightarrow M$  là trực tâm của  $\triangle ADN$

$\Rightarrow AM$  là đường cao thứ ba  $\Rightarrow DM \perp AN$ .

2. Vì  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle HAB \Rightarrow MN \parallel AB$ ,  $MN = \frac{1}{2}AB$

Lại có:  $DC \parallel AB$ ,  $DC = \frac{1}{2}AB$  (gt)

$\Rightarrow DC \parallel MN$ ,  $DC = MN \Rightarrow CDMN$  là hình bình hành  $\Rightarrow DM \parallel CN$ .

Mà  $DM \perp AN$  (chứng minh trên)  $\Rightarrow CN \perp AN \Rightarrow \angle ANC = 90^\circ$

Mặt khác, xét tứ giác ADCI có:  $DC \parallel AI$  (vì  $DC \parallel AB$ ),  $DC = AI$  (vì cùng bằng  $\frac{1}{2}AB$ )

$\Rightarrow$  ADCI là hình bình hành  $\Rightarrow \angle AIC = \angle ADC = 90^\circ$

Ta có:  $\angle ADC = \angle ANC = \angle AIC = 90^\circ \Rightarrow$  các điểm A, I, N, C, D nằm trên cùng một đường tròn đường kính AC.

3. Xét đường tròn đường kính AC có:  $\angle ADN = \angle ACN$  (hai góc nội tiếp cùng chắn AN)

hay  $\angle ADB = \angle ACN$

Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle NAC$  có:  $\angle DAB = \angle CNA = 90^\circ$ ,  $\angle ADB = \angle ACN$  (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle NAC$  (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{BD}{AC}$  Mà  $AB = 2DC \Rightarrow \frac{2DC}{AN} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow AN \cdot BD = 2DC \cdot AC$  (đpcm).

**Bài 2:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $S$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ . Từ  $S$  kẻ hai tiếp tuyến  $SA$  và  $SB$  với đường tròn  $(O)$ . ( $A$  và  $B$  là hai tiếp điểm)

a) Chứng minh tứ giác  $SAOB$  nội tiếp và  $SO$  vuông góc  $AB$ .

b) Vẽ đường thẳng  $a$  đi qua  $S$  và cắt  $(O)$  tại hai điểm  $M$  và  $N$  (với  $a$  không đi qua tâm  $O$ ,  $M$  nằm giữa  $S$  và  $N$ ). Gọi  $H$  là giao điểm của  $SO$  và  $AB$ ;  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Hai đường thẳng  $OI$  và  $AB$  cắt nhau tại  $E$ .

1) Chứng minh:  $OI \cdot OE = R^2$ .

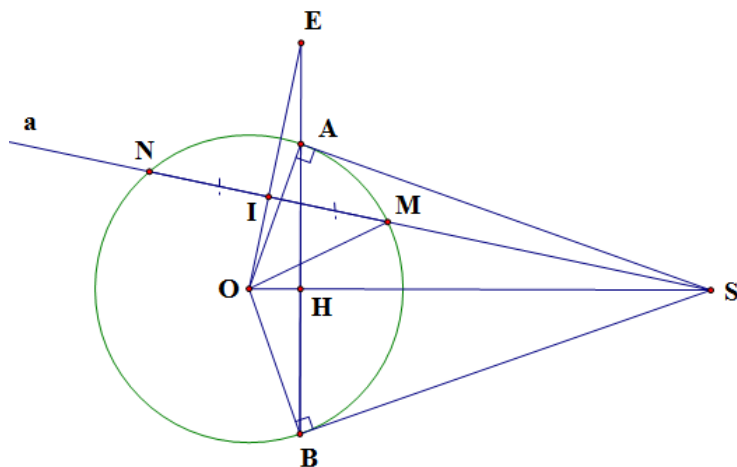
2) Cho  $SO = 2R$  và  $MN = R\sqrt{3}$ . Hãy tính  $SM$  theo  $R$ .

**Giải:**

a) Chứng minh tứ giác  $SAOB$  nội tiếp và  $SO$  vuông góc  $AB$ .

Chứng minh tứ giác  $SAOB$  nội tiếp.

ĐC 1: 246 Mã Lò – Bình Tân – HCM -



$SA$  và  $SB$  là hai tiếp tuyến của đường tròn  $(O) \Rightarrow \angle SAO = \angle SBO = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle SAO + \angle SBO = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $SAOB$  là tứ giác nội tiếp.

**Chứng minh  $SO$  vuông góc  $AB$ . (0,5)**

$SA$  và  $SB$  là hai tiếp tuyến của đường tròn  $(O) \Rightarrow SA = SB$

Mà  $OA = OB = R$

$\Rightarrow SO$  là đường trung trực của  $AB$ .  $\Rightarrow SO \perp AB$

**b)**

**1) Chứng minh:  $OI.OE = R^2$  (1,0)**

$\triangle AOI$  vuông tại  $A$  có  $AH$  là đường cao

$$\Rightarrow OA^2 = OH.OS = R^2 \quad (1)$$

$I$  là trung điểm  $MN$ ,  $MN$  không qua  $O \Rightarrow OI \perp MN$

Xét  $\triangle OHE$  vuông tại  $H$  và  $\triangle OIS$  vuông tại  $I$  có:

$\angle EOH$  chung

$$\Rightarrow \triangle OHE \sim \triangle OIS$$

$$\Rightarrow \frac{OE}{OS} = \frac{OH}{OI} \Rightarrow OI.OE = OH.OS \quad (2) \quad \text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow OI.OE = R^2$$

**2) Cho  $SO = 2R$  và  $MN = R\sqrt{3}$ . Hãy tính  $SM$  theo  $R$ .**

$$\triangle OIM \text{ vuông tại } I \Rightarrow OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = \frac{R}{2}$$

$$\triangle OIS \text{ vuông tại } I \Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 - OI^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{15}}{2}$$

$$SM = SI - IM = \frac{R\sqrt{15}}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{15} - \sqrt{3}).$$

**Bài 3:** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc BC). Vẽ đường tròn (C) có tâm C, bán kính CA. Đường thẳng AH cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là D.

1) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn (C).

2) Trên cung nhỏ AD của đường tròn (C) lấy điểm E sao cho HE song song với AB. Đường thẳng BE cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là F. Gọi K là trung điểm của EF. Chứng minh rằng:

a)  $BA^2 = BE \cdot BF$  và  $BHE = BFC$

b) Ba đường thẳng AF, ED và HK song song với nhau từng đôi một.

**Giải :**

1) Ta có  $\angle BAC = 90^\circ$  nên BA là tiếp tuyến với (C).

BC vuông góc với AD nên

H là trung điểm AD. Suy ra  $\angle BDC = \angle BAC = 90^\circ$

nên BD cũng là tiếp tuyến với (C)

2) a)

Trong tam giác vuông ABC

ta có  $AB^2 = BH \cdot BC$  (1)

Xét hai tam giác đồng dạng ABE và FBA

vì có góc B chung

và  $\angle BAE = \angle BFA$  (cùng chắn cung AE)

$$\text{suy ra } \frac{AB}{FB} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow AB^2 = BE \cdot FB \quad (2)$$

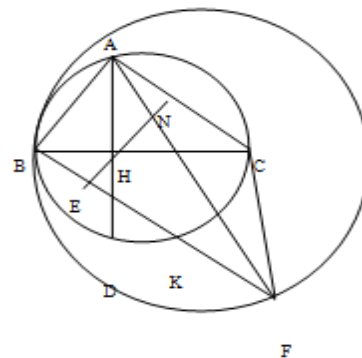
Từ (1) và (2) ta có  $BH \cdot BC = BE \cdot FB$

$$\text{Từ } BE \cdot BF = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF}$$

2 tam giác BEH và BCF đồng dạng vì có góc B chung và  $\frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF}$

$$\Rightarrow \angle BHE = \angle BFC$$

b) do kết quả trên ta có  $\angle BFA = \angle BAE$



$HAC = EHB = BFC$ , do  $AB \parallel EH$ . suy ra  $DAF = DAC - FAC = DFC - CFA = BFA$

$\Rightarrow DAF = BAE$ , 2 góc này chắn các cung  $AE, DF$  nên hai cung này bằng nhau

Gọi giao điểm của  $AF$  và  $EH$  là  $N$ . Ta có 2 tam giác  $HED$  và  $HNA$  bằng nhau

(vì góc  $H$  đối đỉnh,  $HD = HA$ ,  $EDH = HDN$  (do  $AD \parallel AF$ ))

Suy ra  $HE = HN$ , nên  $H$  là trung điểm của  $EN$ . Suy ra  $HK$  là đường trung bình của tam giác  $EAF$ .

Vậy  $HK \parallel AF$ .

Vậy  $ED \parallel HK \parallel AF$ .

**Bài 4:** Cho tam giác đều  $ABC$  có đường cao  $AH$ , lấy điểm  $M$  tùy ý thuộc đoạn  $HC$  ( $M$  không trùng với  $H$ ,  $C$ ). Hình chiếu vuông góc của  $M$  lên các cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt là  $P$  và  $Q$ .

- 1) Chứng minh rằng  $APMQ$  là tứ giác nội tiếp và xác định tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $APMQ$ .
- 2) Chứng minh rằng:  $BP \cdot BA = BH \cdot BM$
- 3) Chứng minh rằng:  $OH \perp PQ$ .
- 4) Chứng minh rằng khi  $M$  thay đổi trên  $HC$  thì  $MP + MQ$  không đổi.

Giải:

- 1) Xét tứ giác  $APMQ$  có:  $MPA = MQA = 90^\circ$  (gt)  
 $\Rightarrow MPA + MQA = 180^\circ \Rightarrow$  tứ giác  $APMQ$  nội tiếp.

Tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $APMQ$

là trung điểm của  $AM$

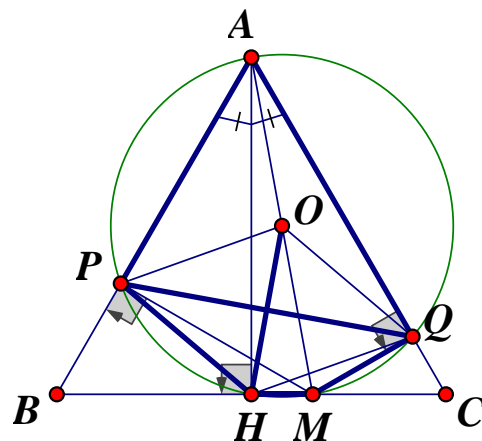
- 2) Xét  $\triangle BPM$  và  $\triangle BHA$  có:  
 $BPM = BHA = 90^\circ$  (gt);  $PBM = HBA$  (chung góc  $B$ )

$$\Rightarrow \triangle BPM \sim \triangle BHA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BP}{BH} = \frac{BM}{BA}$$

$$\Rightarrow BP \cdot BA = BH \cdot BM$$

- 3)  $AHM = 90^\circ$  (gt)  $\Rightarrow H$  thuộc đường tròn đường kính  $AM$   
 $\Rightarrow A, P, H, M, Q$  cùng thuộc đường tròn  $O$ .

$PAH = QAH$  (vì tam giác  $ABC$  đều,  $AH$  là đường cao nên cũng là đường phân giác)



$$\Rightarrow PH = QH \Rightarrow PH = QH \Rightarrow H \text{ thuộc đường trung trực của } PQ \quad (1)$$

$$OP = OH \text{ ( cùng bán kính )} \Rightarrow O \text{ thuộc đường trung trực của } PQ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow OH \text{ là đường trung trực của } PQ \Rightarrow OH \perp PQ.$$

$$4) MP = BM \cdot \sin 60^\circ \text{ và } MQ = CM \cdot \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow MP + MQ = BM \cdot \sin 60^\circ + CM \cdot \sin 60^\circ = (BM + CM) \cdot \sin 60^\circ = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vì BC không đổi nên  $MP + MQ$  không đổi khi M di động trên HC.

### Bài 5:

Cho điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn đó (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại N (N khác C).

a) Chứng minh ABOC là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh  $MB^2 = MN \cdot MC$

c) Tia AN cắt đường tròn (O) tại D (D khác N). Chứng minh:  $\angle MAN = \angle ADC$

Giải:

a). Xét tứ giác ABOC có :

$\angle ABO + \angle ACO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  nên tứ giác ABOC nội tiếp

b). Xét  $\triangle MBN$  và  $\triangle MCB$  có :

$\angle M$  chung

$\angle MBN = \angle MCB$  (cùng chắn cung BN)

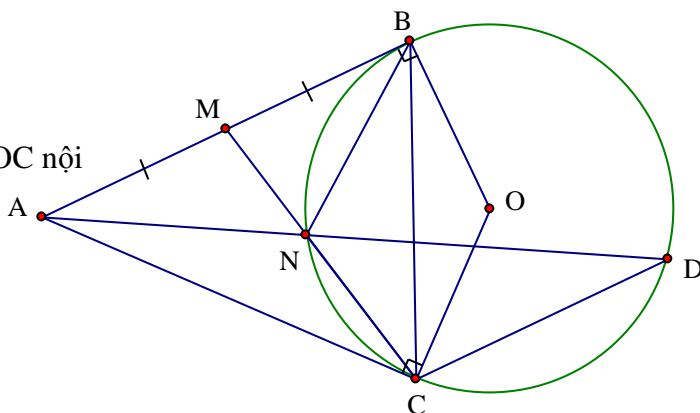
$$\Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle MCB \text{ (g-g) nên } \frac{MB}{MC} = \frac{MN}{MB} \Leftrightarrow MB^2 = MN \cdot MC$$

c). Xét  $\triangle MAN$  và  $\triangle MCA$  có góc  $\angle M$  chung.

Vì M là trung điểm của AB nên  $MA = MB$ .

ĐC 1: 246 Mã Lò – Bình Tân – HCM -

ĐC 2: 448 Tân Phước – Q11 – HCM 6



Theo câu b ta có:  $MA^2 = MN.MC \Leftrightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MC}{MA}$

Do đó:  $\triangle MAN \sim \triangle MCA$  (c-g-c)

$$\Rightarrow \angle MAN = \angle MCA = \angle NCA \quad (1)$$

mà:  $\angle NCA = \angle NDC$  (cùng chắn cung NC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $\angle MAN = \angle NDC$  hay  $\angle MAN = \angle ADC$ .

**Bài 6:** (1,0 điểm). Cho hai đường tròn đồng tâm (O; 21cm) và (O; 13cm). Tìm bán kính của đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn đã cho.

Giải:

Theo gt có: OB = 21 (cm); OA = 13 (cm)

- Trường hợp 1 Đường tròn phải tìm có đường kính là AB

$$\rightarrow AB = 21 - 13 = 8 \text{ (cm)}$$

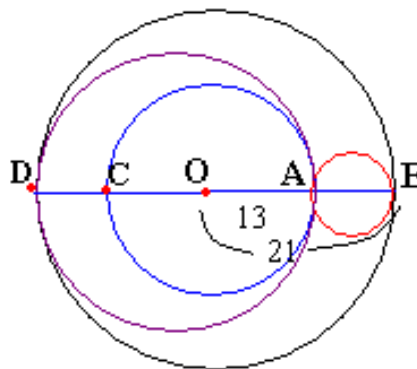
→ Bán kính đường tròn tiếp xúc với hai

đường tròn đồng tâm  $R_1 = 4$  (cm)

- Trường hợp 2 Đường tròn phải tìm có đường kính là OD

$$\rightarrow AD = 21 + 13 = 34 \text{ (cm)}$$

$$\rightarrow R_2 = 17 \text{ (cm)}$$



**Bài 7 :**

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc BC), biết  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $CH = a$ . Tính AB và AC theo a.

2) Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định, CD là đường kính thay đổi của đường tròn (O) (khác AB). Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AC và AD lần lượt tại N và M. Chứng minh tứ giác CDMN nội tiếp.

3) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính bằng a. Biết AC vuông góc với BD. Tính  $AB^2 + CD^2$  theo a.

Giải:

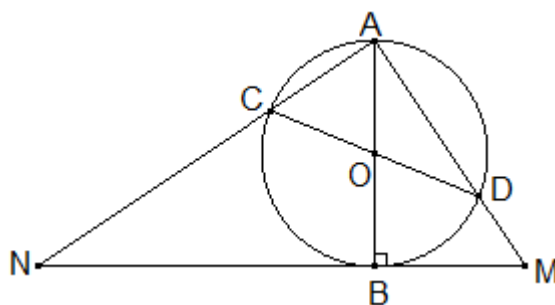
$$1) \Delta ACH \text{ có } \cos C = \frac{CH}{AC} \text{ nên } AC = \frac{CH}{\cos C} = \frac{a}{\cos 60^\circ} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a.$$

$$\Delta ABC \text{ có } AB = AC \cdot \tan C = 2a \cdot \tan 60^\circ = 2a \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}a. \text{ Vậy } AB = 2\sqrt{3}a, AC = 2a.$$

2)

GT | (O) đường kính AB cố định, đường kính CD thay đổi,  
MN là tiếp tuyến tại B của (O).

KL | Tứ giác CDMN nội tiếp



Chứng minh tứ giác CDMN nội tiếp

$$\text{Ta có : } \angle ADC = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC}.$$

$$\angle N = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{ADB} - \text{sđ} \widehat{BC}) = \frac{1}{2} (\text{sđ} \widehat{ACB} - \text{sđ} \widehat{BC}) = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC}.$$

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle N \text{ (cùng bằng } \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} \text{)}.$$

$\Rightarrow$  Tứ giác CDMN nội tiếp được (góc ngoài bằng góc đối trong).

3)

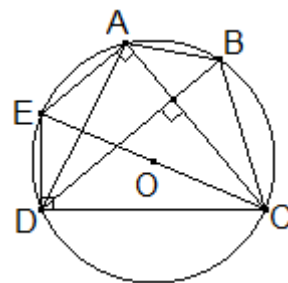
GT | ABCD nội tiếp (O; a),  $AC \perp BD$

KL | Tính  $AB^2 + CD^2$  theo a.

Tính  $AB^2 + CD^2$  theo a.

Vẽ đường kính CE của đường tròn (O).

Ta có :  $\angle EAC = 90^\circ$ ,  $\angle EDC = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn đường kính EC).





$$\left. \begin{array}{l} AC \perp AE \\ AC \perp BD \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow AE \parallel BD \Rightarrow ABDE \text{ là hình thang cân (hình thang nội tiếp (O))}$$

$$\Rightarrow AB = DE \text{ (cạnh bên hình thang cân).}$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = DE^2 + DC^2 = EC^2 = (2a)^2 = 4a^2 \text{ (do } \triangle EDC \text{ vuông tại D).}$$

$$\text{Vậy } AB^2 + CD^2 = 4a^2.$$

**Bài 8:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O ( $AB < AC$ ). Các đường cao AD và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFHD nội tiếp. Suy ra  $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$

b) Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B và C) và N là điểm đối xứng của M qua AC. Chứng minh tứ giác AHCN nội tiếp.

c) Gọi I là giao điểm của AM và HC; J là giao điểm của AC và HN.

Chứng minh  $\angle AJI = \angle ANC$

d) Chứng minh rằng : OA vuông góc với IJ

Giải:

a) Ta có tứ giác BFHD nội tiếp do có 2 góc đối

$$F \text{ và } D \text{ vuông} \Rightarrow \angle FHD = \angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$$

b)  $\angle ABC = \angle AMC$  cùng chắn cung AC

mà  $\angle ANC = \angle AMC$  do M, N đối xứng

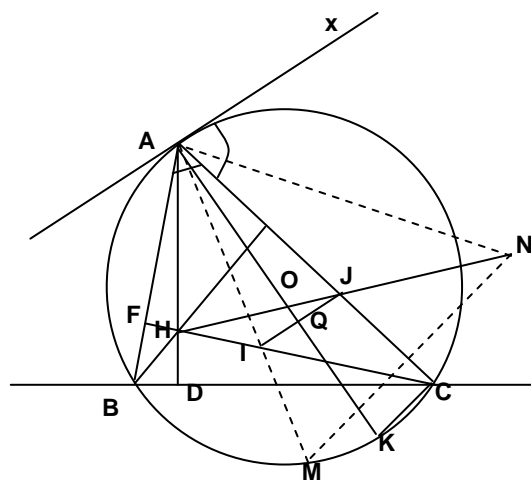
Vậy ta có  $\angle AHC$  và  $\angle ANC$  bù nhau

$$\Rightarrow \text{tứ giác AHCN nội tiếp}$$

c) Ta sẽ chứng minh tứ giác AHJI nội tiếp

Ta có  $\angle NAC = \angle MAC$  do MN đối xứng qua AC mà  $\angle NAC = \angle CHN$

(do AHCN nội tiếp)



$\Rightarrow IAJ = IHJ \Rightarrow$  tứ giác HIJA nội tiếp.

$\Rightarrow AJI$  bù với  $AHI$  mà  $ANC$  bù với  $AHI$  (do AHNC nội tiếp)  $\Rightarrow AJI = ANC$

## Cách 2 :

Ta sẽ chứng minh IJCM nội tiếp

Ta có  $AMJ = ANJ$  do AN và AM đối xứng qua AC.

Mà  $ACH = ANH$  (AHNC nội tiếp) vậy  $ICJ = IMJ$

$\Rightarrow IJCM$  nội tiếp  $\Rightarrow AJI = AMC = ANC$

d) Kẻ OA cắt đường tròn (O) tại K và IJ tại Q ta có  $AJQ = AKC$

vì  $AKC = AMC$  (cùng chắn cung AC), vậy  $AKC = AMC = ANC$

Xét hai tam giác AQJ và AKC :

Tam giác AKC vuông tại C (vì chắn nửa vòng tròn)  $\Rightarrow$  2 tam giác trên đồng dạng

Vậy  $\angle Q = 90^\circ$ . Hay AO vuông góc với IJ

**Cách 2 :** Kẻ thêm tiếp tuyến Ax với vòng tròn (O) ta có  $\angle xAC = \angle AMC$

mà  $\angle AMC = \angle AJI$  do chứng minh trên vậy ta có  $\angle xAC = \angle AJQ \Rightarrow JQ$  song song Ax

vậy IJ vuông góc AO (do Ax vuông góc với AO)

**Bài 9** Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O; R) (M khác A, N khác B). Tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1) Chứng minh tứ giác AMBN là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và  $ME \parallel NF$ .

4) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác MNPQ có diện tích nhỏ nhất.

Giải:

1) Tứ giác AMBN có 4 góc vuông, vì là 4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

2) Ta có  $\angle ANM = \angle ABM$  (cùng chắn cung AM)

và  $\angle ABM = \angle AQB$  (góc có cạnh thẳng góc)

vậy  $\angle ANM = \angle AQB$  nên MNPQ nội tiếp.

3) OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

OF // AP nên OF là đường trung bình của tam giác ABP

Suy ra F là trung điểm của BP.

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc với OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh huyền BP.

Xét 2 tam giác NOF = OFB (c-c-c) nên  $\angle ONF = 90^\circ$ .

Tương tự ta có  $\angle OME = 90^\circ$  nên ME // NF vì cùng vuông góc với MN.

4)

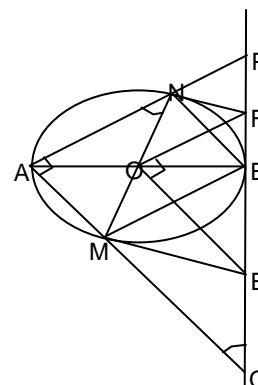
$$2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R \cdot PQ - AM \cdot AN = 2R \cdot (PB + BQ) - AM \cdot AN$$

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra  $\frac{AB}{QB} = \frac{BP}{BA} \Rightarrow AB^2 = BP \cdot QB$

Nên áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có  $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB \cdot BQ} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có  $AM \cdot AN \leq \frac{AM^2 + AN^2}{2} = \frac{MN^2}{2} = 2R^2$

Do đó,  $2S_{MNPQ} \geq 2R \cdot 4R - 2R^2 = 6R^2$ . Suy ra  $S_{MNPQ} \geq 3R^2$



Dấu bằng xảy ra khi  $AM = AN$  và  $PQ = BP$  hay  $MN$  vuông góc  $AB$ .

**Bài 10:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$  ( $H$  thuộc  $BC$ ). Vẽ đường tròn  $(C)$  có tâm  $C$ , bán kính  $CA$ . Đường thẳng  $AH$  cắt đường tròn  $(C)$  tại điểm thứ hai là  $D$ .

1) Chứng minh  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$ .

2) Trên cung nhỏ  $AD$  của đường tròn  $(C)$  lấy điểm  $E$  sao cho  $HE$  song song với  $AB$ . Đường thẳng  $BE$  cắt đường tròn  $(C)$  tại điểm thứ hai là  $F$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $EF$ . Chứng minh rằng:

a)  $BA^2 = BE.BF$  và  $BHE = BFC$

b) Ba đường thẳng  $AF$ ,  $ED$  và  $HK$  song song với nhau từng đôi một.

Giải:

1) Ta có  $\angle BAC = 90^\circ$  nên  $BA$  là tiếp tuyến với  $(C)$ .

$BC$  vuông góc với  $AD$  nên

$H$  là trung điểm  $AD$ . Suy ra  $\angle BDC = \angle BAC = 90^\circ$

nên  $BD$  cũng là tiếp tuyến với  $(C)$

2)

a) Trong tam giác vuông  $ABC$

ta có  $AB^2 = BH.BC$  (1)

Xét hai tam giác đồng dạng  $ABE$  và  $FBA$

vì có góc  $B$  chung

và  $\angle BAE = \angle BFA$  (cùng chắn cung  $AE$ )

suy ra  $\frac{AB}{FB} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow AB^2 = BE.FB$  (2)

Từ (1) và (2) ta có  $BH.BC = BE.FB$

Từ  $BE.BF = BH.BC \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF}$

2 tam giác  $BEH$  và  $BCF$  đồng dạng vì có góc  $B$  chung và  $\frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BF}$

$\Rightarrow \angle BHE = \angle BFC$

b) do kết quả trên ta có  $BFA = BAE$

$HAC = EHB = BFC$ , do  $AB \parallel EH$ . suy ra  $DAF = DAC - FAC = DFC - CFA = BFA$

$\Rightarrow DAF = BAE$ , 2 góc này chắn các cung  $AE, DF$  nên hai cung này bằng nhau

Gọi giao điểm của  $AF$  và  $EH$  là  $N$ . Ta có 2 tam giác  $HED$  và  $HNA$  bằng nhau

(vì góc  $H$  đối đỉnh,  $HD = HA$ ,  $EDH = HDN$  (do  $AD \parallel AF$ ))

Suy ra  $HE = HN$ , nên  $H$  là trung điểm của  $EN$ . Suy ra  $HK$  là đường trung bình của tam giác  $EAF$ .

$\Rightarrow HK \parallel AF$ .

Vậy  $ED \parallel HK \parallel AF$ .

### Bài 11:

Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $A$  cố định nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Gọi  $M$  là một điểm di động trên cung nhỏ  $BC$  ( $M$  khác  $B$  và  $C$ ). Đường thẳng  $AM$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $N$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $MN$ .

a) Chứng minh 4 điểm  $A, B, O, E$  cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b) Chứng minh  $2\angle BNC + \angle BAC = 180^\circ$

c) Chứng minh  $AC^2 = AM \cdot AN$  và  $MN^2 = 4(AE^2 - AC^2)$ .

d) Gọi  $I, J$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên cạnh  $AB, AC$ . Xác định vị trí của  $M$  sao cho tích  $MI \cdot MJ$  đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

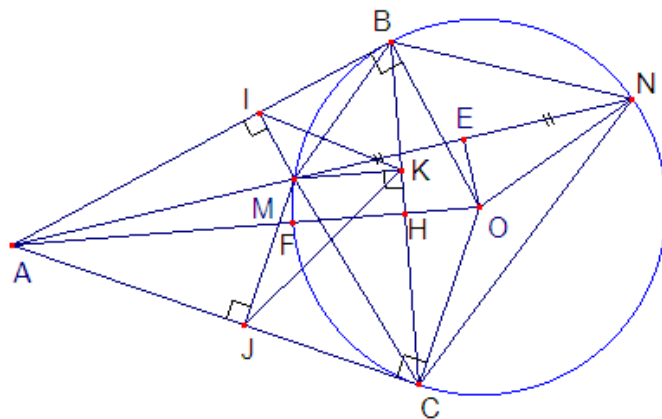
a) Ta có:  $EM = EN$  (gt)  $\Rightarrow OE \perp MN \Rightarrow \angle AEO = 90^\circ$

Mà  $\angle ABO = 90^\circ$  ( $AB$  là tiếp tuyến  $(O)$ )

Suy ra: hai điểm  $B, E$  thuộc đường tròn đường kính  $AO$ . Hay  $A, B, E, O$  cùng thuộc một đường tròn, tâm của đường tròn là trung điểm của  $AO$ .

b) Ta có:  $\angle BOC = 2\angle BNC$  (góc ở tâm và góc nt cùng chắn một cung).

Mặt khác:  $\angle BOC + \angle BAC = 180^\circ$





Từ (1) và (2) suy ra:

$$\Delta MIK \sim \Delta MKJ$$

(g.g)

$$\Rightarrow \frac{MI}{MK} = \frac{MK}{MJ} \Rightarrow MK^2 = MI \cdot NJ$$

Để  $MI \cdot MJ$  lớn nhất  
thì  $MK$  phải lớn  
nhất. Mặt khác  $M$   
thuộc cung nhỏ  $BC$   
nên  $MK \leq FH \Rightarrow$  vậy  
 $MK$  lớn nhất khi  
 $MK = FH$ . Hay  $M \equiv F$

Vậy khi  $A, M, O$  thẳng hàng thì  $MI \cdot MJ$  đạt giá trị lớn nhất.

### Bài 12:

Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm bên ngoài đường tròn  $(O)$ . Kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn  $(O)$  ( $A, B$  là các tiếp điểm). Một đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  cắt đường tròn tại hai điểm  $C$  và  $D$  ( $C$  nằm giữa  $M$  và  $D$ ,  $d$  không đi qua tâm  $O$ ).

- Chứng minh rằng:  $MA^2 = MC \cdot MD$ .
- Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB$  và  $MO$ . Chứng minh tứ giác  $CHOD$  nội tiếp trong đường tròn.
- Cho  $MC \cdot MD = 144$  và  $OM = 13$  (độ dài các đoạn thẳng đã cho có cùng đơn vị đo). Tính độ dài đường tròn  $(O)$  và diện tích hình tròn  $(O)$

Giải:

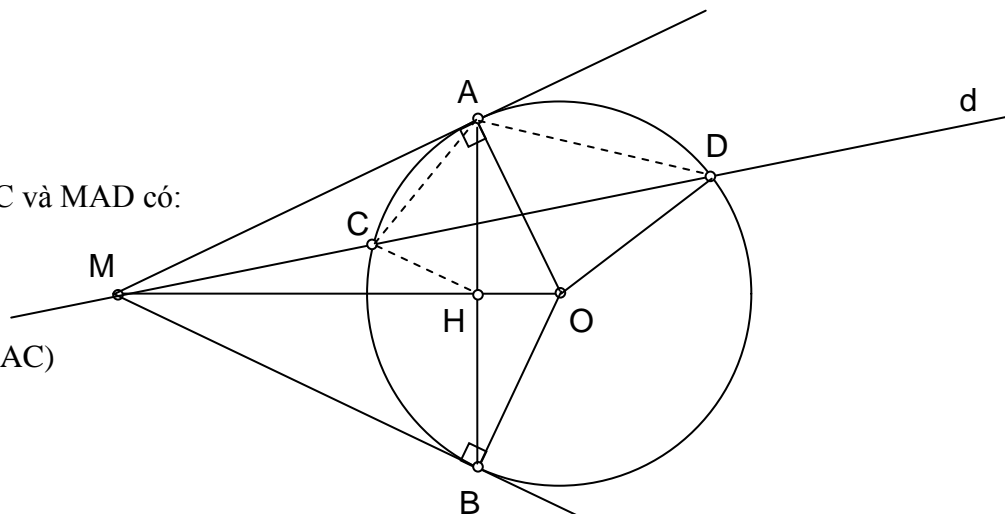
a) Chứng minh  $MA^2 = MC \cdot MD$

Nối  $AC, AD$ . Hai tam giác  $MAC$  và  $MAD$  có:

$$\angle AMC = \angle DMA \text{ (góc chung)}$$

$$\angle MAC = \angle MDA \text{ (cùng chắn cung } AC)$$

Do đó:  $\Delta MAC \sim \Delta MDA$  (g-g)



Suy ra:  $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA}$

Từ đó:  $MA^2 = MC.MD$

b) Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp.

+  $OA = OB$  (= bán kính);

$MA = MB$  (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra:  $MO$  là trung trực  $AB$ . Suy ra:  $AH \perp OM$  tại  $H$ .

+ Trong tam giác  $MAO$  vuông tại  $A$  (gt) có  $AH$  là đường cao nên:  $MA^2 = MH.MO$

Kết hợp kết quả câu a), ta có:  $MC.MD = MH.MO$ . Từ đó:  $\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$ .

Lại có:  $\angle CMH = \angle OMD$  (góc chung)

Suy ra:  $\triangle CMH \sim \triangle OMD$  (c-g-c)

Từ đó:  $\angle ODM = \angle CHM$  (\*)

Từ (\*) suy ra tứ giác  $CHOD$  nội tiếp (có một góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

c) Tính  $C_{(O)}$  và  $S_{(O)}$

Từ câu a) ta có:  $MC.MD = MA^2 = 144$

Tam giác  $MAO$  vuông tại  $A$  cho:  $OA = \sqrt{OM^2 - MA^2} = \sqrt{13^2 - 144} = 5$  hay  $R = OA = 5$

Từ đó: Chu vi đường tròn  $(O)$  (độ dài đường tròn  $(O)$ ) là:  $C_{(O)} = 2\pi R = 2\pi 5 = 10\pi$  (đ.v.d.d)

Diện tích hình tròn  $(O)$  là:  $S_{(O)} = R^2 \pi = 5^2 \pi = 25\pi$  (đ.v.d.t)

**Bài 13:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$  ( $E$  khác  $B$  và  $C$ ). Đường tròn đường kính  $EC$  cắt cạnh  $AC$  tại  $M$  và cắt đường thẳng  $AE$  tại  $N$  ( $M$  khác  $C$ ,  $N$  khác  $E$ ).

1) Chứng minh các tứ giác  $ABEM$ ,  $ABNC$  là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh  $ME$  là tia phân giác của góc  $BMN$ .

3) Chứng minh  $AE.AN + CE.CB = AC^2$ .



Giải:

1) M thuộc đường tròn đường kính EC nên  $\angle EMC = 90^\circ \Rightarrow \angle AME = 90^\circ$ .

$\Rightarrow \angle AME + \angle ABE = 180^\circ$  suy ra tứ giác ABEM nội tiếp (tứ giác có tổng 2 góc đối bằng  $180^\circ$ ).

N thuộc đường tròn đường kính EC nên  $\angle ENC = 90^\circ$  hay  $\angle ANC = 90^\circ$ .

Suy ra  $\angle ANC = \angle ABC = 90^\circ$  do đó tứ giác ABNC nội tiếp (hai điểm B, N cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông).

2) Trong đường tròn ngoại tiếp ABEM:  $\angle EAB = \angle EMB$  (\*) (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BE).

Trong đường tròn ngoại tiếp MENC:  $\angle EMN = \angle ECN$  (\*\*) (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EN).

Trong đường tròn ngoại tiếp ABNC:  $\angle BAN = \angle BCN$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BN) hay  $\angle EAB = \angle ECN$ . (\*\*\*)

Từ (\*), (\*\*) và (\*\*\*) suy ra  $\angle EMB = \angle EMN$ . Do đó ME là tia phân giác của góc  $\angle BMN$  (đpcm).

3)

Ta có  $\angle ABC = \angle CME = 90^\circ$ ;  $\angle ECM = \angle ACB$ . Do đó  $\triangle CME$  và  $\triangle CBA$  đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = CE \cdot CB.$$

$$\text{Chứng minh được } \triangle AEM \text{ và } \triangle ACN \text{ đồng dạng (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AN} \Rightarrow AE \cdot AN = AM \cdot AC.$$

$$\text{Do đó } AE \cdot AN + CE \cdot CB = CA \cdot CM + CA \cdot AM$$

$$= CA \cdot (CM + AM) = CA \cdot CA = CA^2.$$

$$\text{Vậy } AE \cdot AN + CE \cdot CB = AC^2 \text{ (đpcm).}$$

#### Bài 14 :

Cho tam giác ABC có đường cao AH, biết  $\angle BCA < \angle ABC < \angle CAB < 90^\circ$ . Gọi đường tròn (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi D là giao điểm

của tia AI với đường tròn (O), biết D khác A. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của đường thẳng AH với hai đường thẳng BD và CI, biết E nằm giữa hai điểm B và D.

1) Chứng minh  $BH = AB \cdot \cos \angle ABC$ . Suy ra  $BC = AB \cdot \cos \angle ABC + AC \cdot \cos \angle BCA$

2) Chứng minh bốn điểm B, E, I, F cùng thuộc một đường tròn.

3) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC

Giải:

1) Chứng minh  $BH = AB \cdot \cos \angle ABC$ . Suy ra  $BC = AB \cdot \cos \angle ABC + AC \cdot \cos \angle BCA$  :

Xét  $\triangle AHB$  vuông tại H có :  $BH = AB \cdot \cos \angle ABC$  (quan hệ giữa các cạnh trong tam giác vuông)

Chứng minh tương tự :  $CH = AC \cdot \cos \angle BCA$

Suy ra :  $BC = BH + CH = AB \cdot \cos \angle ABC + AC \cdot \cos \angle BCA$

2) Chứng minh bốn điểm B, E, I, F cùng thuộc một đường tròn:

Gọi M, N lần lượt là giao điểm các tia phân giác B, C với (O); K là giao điểm của AD và BC.

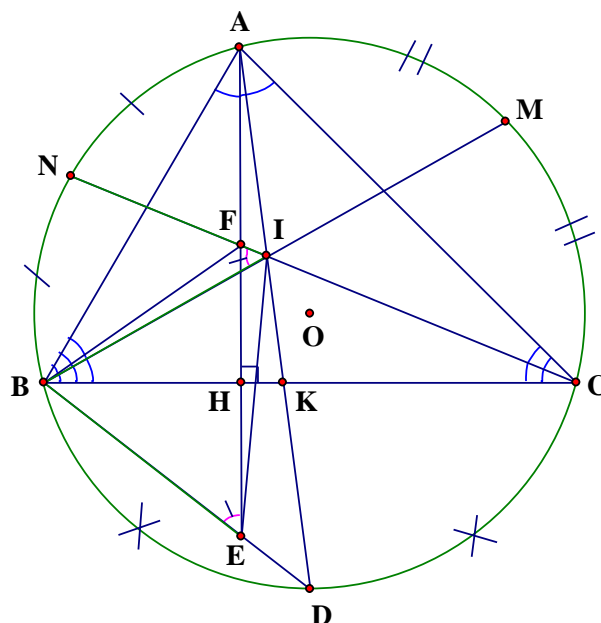
Ta có :  $\angle BEF = \angle EAD + \angle ADB$  (tính chất góc ngoài của  $\triangle AED$ )

mà  $\angle EAD = 90^\circ - \angle AKB$  ( $\triangle AHK$  vuông tại H)

$\Rightarrow \angle EAD = 90^\circ - \frac{\angle A + \angle C}{2}$  (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

và  $\angle ADB = \frac{\angle A + \angle C}{2}$  (góc nội tiếp)

suy ra :  $\angle BEF = 90^\circ - \frac{\angle A + \angle C}{2} + \frac{\angle A + \angle C}{2} = 90^\circ - \angle CAD$



$$\Rightarrow \widehat{BEF} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BIF} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} \quad (\text{tính chất góc ngoài của } \triangle BIC) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $\widehat{BEF} = \widehat{BIF}$

Suy ra: tứ giác BEIF nội tiếp được đường tròn

(E, I cùng nhìn BF dưới hai góc bằng nhau)

### 3) Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC:

Chứng minh  $\triangle BID$  cân tại D

Chứng minh DK là đường trung trực của BI (3)

Chứng minh  $DB = DC$

Chứng minh DO là đường trung trực của BC (4)

Từ (3) và (4) suy ra: D là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle IBC$

### Bài 15:

Cho đường tròn tâm O đường kính AB, trên cùng một nửa đường tròn (O) lấy 2 điểm G và E (theo thứ tự A, G, E, B) sao cho tia EG cắt tia BA tại D. Đường thẳng vuông góc với BD tại D cắt BE tại C, đường thẳng CA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh tứ giác DFBC nội tiếp.

b) Chứng minh:  $BF = BG$

c) Chứng minh:  $\frac{DA}{BA} = \frac{DG \cdot DE}{BE \cdot BC}$

Giải:

a) Chứng minh tứ giác DFBC nội tiếp.

Ta có:  $\angle AFB = 90^\circ$  (góc nt chắn nửa đường tròn)

Ta có:  $\angle CDB = \angle CFB = 90^\circ \Rightarrow$

tứ giác DFBC nội tiếp đường tròn đường kính BC

b) Chứng minh:  $BF = BG$

Ta có:  $\angle AEB = 90^\circ$  (góc nt chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \angle AEC = 90^\circ$$

Ta có:  $\angle AEC + \angle ADC = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác ADCE nội tiếp đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1$  (vì nt cùng chắn cung DA)

Ta có:  $\angle B_1 = \angle C_1$  (vì nt cùng chắn cung DF của đường tròn đường kính BC)

Do đó:  $\angle E_1 = \angle B_1 \Rightarrow AG = AF \Rightarrow BF = BG \Rightarrow BF = BG$

c) Chứng minh:  $\frac{DA}{BA} = \frac{DG.DE}{BE.BC}$

Ta chứng minh được:

$$\triangle DGB \sim \triangle DAE \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{DG}{DA} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow DG.DE = DA.DB \quad (1)$$

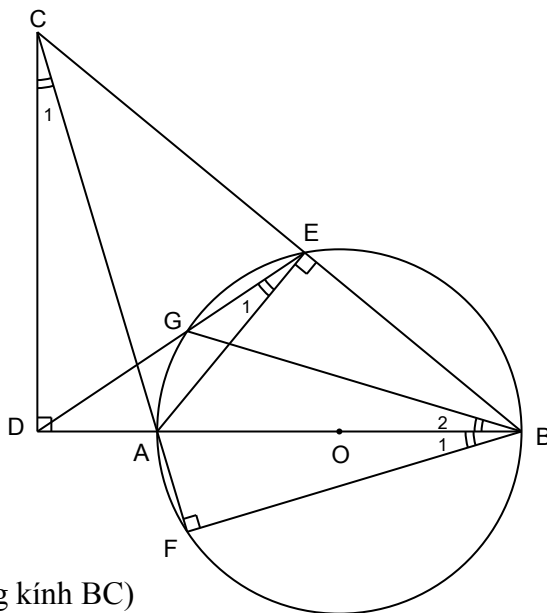
$$\triangle BEA \sim \triangle BDC \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BE.BC = BA.BD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{DG.DE}{BE.BC} = \frac{DA.DB}{BA.BD} = \frac{DA}{BA} \text{ (đpcm)}$$

## Bài 16.

Cho đường tròn tâm O đường kính AB, trên tia AB lấy điểm C bên ngoài đường tròn. Từ C kẻ đoạn CD vuông góc với AC và  $CD = AC$ . Nối AD cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ đường thẳng DB cắt đường tròn (O) tại N.

1) Chứng minh ANCD là tứ giác nội tiếp. Xác định đường kính và tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ANCD.



2) Chứng minh  $CND = CAD$  và MAB là tam giác vuông cân.

3) Chứng minh  $AB.AC = AM.AD$

Giải:

a) Ta có:  $AC \perp CD$  (gt)

$$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$$

$$\angle AND = \angle ANB = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

Xét tứ giác ANCD có :

$$\angle ACD = \angle AND (= 90^\circ)$$

$\Rightarrow$  Tứ giác ANCD nội tiếp đường tròn đường kính AD và tâm đường tròn là trung điểm AD. (Có 2 đỉnh kề N, C cùng nhìn 1 cạnh AD nối 2 đỉnh còn lại dưới góc bằng nhau là  $90^\circ$ )

b) Ta có:  $CND = CAD$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DC)

$$\angle AMB = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMB \text{ vuông tại M}$$

Ta có:  $CA = CD$  (gt) Và  $\angle ACD = 90^\circ$  (cmt)

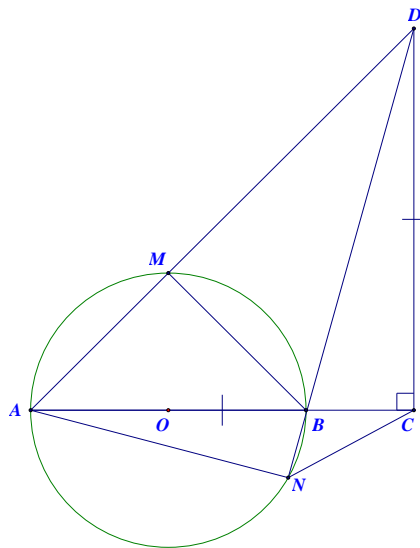
$$\Rightarrow \triangle CAD \text{ vuông cân tại C}$$

$$\Rightarrow \angle MAB = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MBA = 45^\circ \text{ (vì } \triangle AMB \text{ vuông tại M)}$$

Nên  $\triangle MAB$  là tam giác vuông cân.

c) Xét  $\triangle ABM$  ( $\angle AMB = 90^\circ$ ) và  $\triangle ADC$  ( $\angle ACD = 90^\circ$ ) có :



$DAC$  : chung

$\Rightarrow \triangle ABM$  đồng dạng  $\triangle ADC$  (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC}$$

$$\Rightarrow AB.AC = AM.AD$$

### Bài 17:

Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Gọi  $C$  là điểm chính giữa của cung  $AB$ ,  $M$  là một điểm bất kì trên cung  $AB$  ( $M$  khác  $A$  và  $C$ ). Đường thẳng  $BM$  cắt  $AC$  tại  $H$ . Kẻ  $HK$  vuông góc với  $AB$  ( $K$  thuộc  $AB$ ).

- Chứng minh tứ giác  $CBKH$  là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh  $CA$  là tia phân giác của  $\angle MCK$ .
- Trên đoạn thẳng  $BM$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = AM$ . Chứng minh tam giác  $ECM$  là tam giác vuông cân.

Giải:

- a) Ta có:  $\angle HCB = \angle ACB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

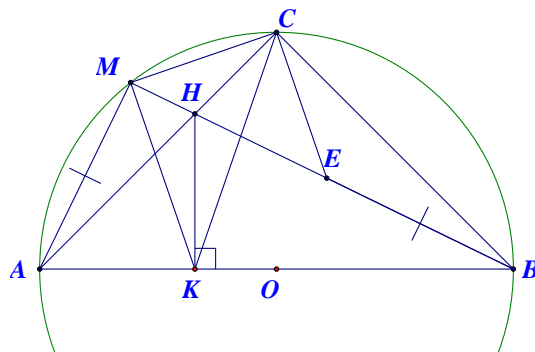
$HK \perp AB$  (gt)

$$\Rightarrow \angle HKB = 90^\circ$$

Xét tứ giác  $CBKH$  có:

$$\angle HCB + \angle HKB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $CBKH$  nội tiếp (Tổng 2 góc đối bằng  $180^\circ$ ).



- b) Ta có:  $\angle MCA = \angle MBA$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  $AM$  của  $(O)$ )

Mà  $\angle MBA = \angle HCK$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  $HK$  của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $HCBK$ )

$$\Rightarrow \angle MCA = \angle HCK$$

$\Rightarrow CA$  là tia phân giác của  $\angle MCK$ .

c) Xét  $\triangle MAC$  và  $\triangle EBC$  có :

$$AM = BE \text{ (gt)}$$

$$\angle MAC = \angle EBC \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)}$$

$$AC = BC \text{ (Liên hệ dây cung. Vì C là điểm chính giữa cung AB nên } AC = BC \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAC = \triangle EBC \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \angle MCA = \angle BCE \text{ và } MC = CE \text{ (1)}$$

$$\text{Mà } \angle ACE + \angle BCE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MCA + \angle ACE = 90^\circ$$

$$\text{Hay } \angle MCE = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow$  ECM là tam giác vuông cân tại C.

### Bài 18:

Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB; AC lần lượt tại M và N. Gọi H là giao điểm của BN và CM, K là trung điểm của AH

- Chứng minh rằng tứ giác AMHN nội tiếp đường tròn
- Chứng minh  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$
- Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a. Có } \angle BMC &= 90^\circ \text{ (Nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \\ \Rightarrow \angle AMH &= 90^\circ \text{ (do kề bù)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Có } \angle BNC &= 90^\circ \text{ (Nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \\ \Rightarrow \angle ANH &= 90^\circ \text{ (do kề bù)} \end{aligned}$$

Vậy  $\angle AMH + \angle ANH = 180^\circ$  nên tứ giác AMHN nội tiếp

$$\text{b) Xét } \triangle AMC \text{ và } \triangle ANB \text{ có } \angle AMC = \angle ANB = 90^\circ \text{ (cm ý a)}$$

Có  $\angle A$  chung nên  $\triangle AMC$  đồng dạng  $\triangle ANB$  ( gg )

$$\Rightarrow AM/AN = AC/AB \text{ hay } AM \cdot AB = AN \cdot AC$$

c) Có H là trực tâm của  $\triangle ABC \Rightarrow AH$  vuông góc BC

$$\Rightarrow \angle CAH + \angle ACB = 90^\circ \quad (1)$$

KN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của  $\triangle$  vuông NHA

$$\Rightarrow \angle KNA = \angle KAN \quad (2)$$

$$\triangle ONC \text{ cân tại O nên } \angle ONC = \angle OCN \quad (3)$$

$$\text{Từ 1,2,3 ta có : } \angle KAN + \angle ONC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KNO = 90^\circ \text{ hay KN là tiếp tuyến của đường tròn tâm O}$$

**Bài 19.:** Cho  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Hạ các đường cao AH, BK của tam giác. Các tia AH, BK lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E.

- Chứng minh tứ giác ABHK nội tiếp đường tròn . Xác định tâm đường tròn đó.
- Chứng minh :  $HK \parallel DE$ .
- Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên (O) sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn.  
Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CHK$  không đổi.

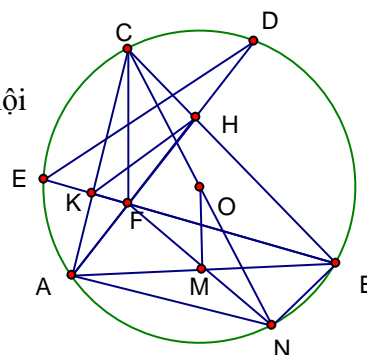
Giải:

- Tứ giác ABHK có  $\angle AKB = \angle AHB = 90^\circ$  . Suy ra Tứ giác ABHK nội tiếp đường tròn đường kính AB. Tâm O' của đường tròn này là trung điểm của AB.
- Tứ giác ABHK nội tiếp nên  $\angle KHA = \angle KBA$  . Xét (O) có  $\angle KBA = \angle EDA$  . Suy ra  $\angle KHA = \angle EDA$  . Do đó  $HK \parallel DE$ .
- Gọi M là trung điểm của AB  $\Rightarrow M$  cố định  $\Rightarrow OM$  không đổi.  
Chứng minh : AFBN là hình bình hành suy ra F, M, N thẳng hàng

Chứng minh :  $CF = 2 \cdot OM$  không đổi.

Chứng minh CKFH nội tiếp đường tròn đường kính CF. Suy ra độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác

$$CHK \text{ bằng } OM = \frac{CF}{2} \text{ không đổi}$$





**Bài 20:**

Cho đường tròn (O;R) đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho  $AC=R$ . Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. lấy điểm M bất kỳ trên đường tròn (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

1. Chứng minh tứ giác ACPM là tứ giác nội tiếp.

2. Tính BM.BP theo R.

3. Chứng minh hai đường thẳng PC và NQ song song.

4. Chứng minh trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi điểm M thay đổi trên đường tròn (O).

Giải:

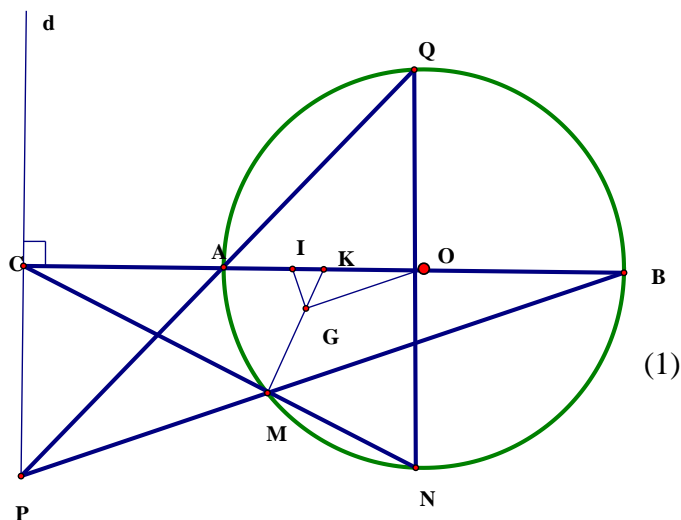
d) xét tam giác CMK có  $CK = KB = \frac{3R}{2}$

$$KB = KO + OB \Rightarrow KO = \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{KO}{KB} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Lại có } \frac{KG}{KM} = \frac{1}{3} \quad (2) \Rightarrow \frac{KO}{KB} = \frac{KG}{KM} \Rightarrow OG \parallel MB$$

$$\text{Từ G kẻ } GI \parallel AM \Rightarrow \frac{KI}{KA} = \frac{KG}{KM} = \frac{1}{3} \Rightarrow KI = \frac{R}{6} \Rightarrow OI = \frac{2R}{3} \text{ không đổi}$$

Mà góc  $IGO = 90^\circ$  vì  $IG \parallel AM$  và  $GO \parallel MB$  và góc  $AMB = 90^\circ$  nên G thuộc đường tròn tâm O bán kính  $OI = \frac{2R}{3}$  không đổi.

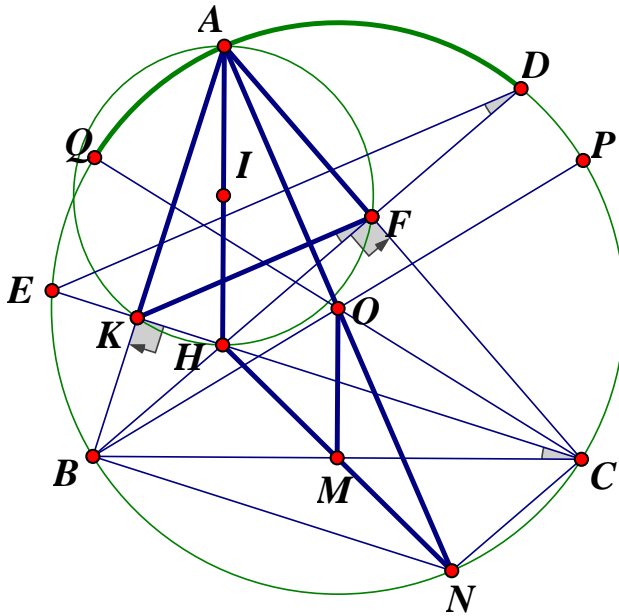
**Bài 21:**

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường cao BF, CK của tam giác ABC lần lượt cắt (O) tại D, E.

a) Chứng minh : Tứ giác BCFK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh :  $DE \parallel FK$ .

- c) Gọi P,Q lần lượt là điểm đối xứng với B,C qua O. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AFK có bán kính không đổi khi A thay đổi trên cung nhỏ PQ (không trùng với các điểm P,Q)
- Giải:



a) BCFK nội tiếp

$\angle BKC = \angle BFC = 90^\circ$  ( $CK \perp AB$  và  $BF \perp AC$ )  $\Rightarrow$  BCFK nội tiếp

b) DE//FK

$\angle BDE = \angle BCE$  (cùng chắn cung EB của (O))

$\angle BCE = \angle BFK$  (cùng chắn cung BK của (BCFK))

$\Rightarrow \angle BDE = \angle BFK \Rightarrow DE // FK$

c) Bán kính đường tròn (AFK) không đổi khi A di động trên cung PQ

Kẻ đường kính AN và lấy điểm M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow \angle ACN = \angle ABN = 90^\circ \Rightarrow NC \perp AC$  và  $NB \perp AB$  mà  $BH \perp AC$  và  $CH \perp AB$

$\Rightarrow NC // BH$  và  $NB // CH \Rightarrow BHCN$  hình bình hành  $\Rightarrow M$  là trung điểm HN

Vì  $OA = ON \Rightarrow OM$  là đường trung bình  $\Delta AHN \Rightarrow OM = AH/2$  và  $OM // AH$

Gọi I là trung điểm AH. Ta có  $\angle AKH = \angle AFH = 90^\circ \Rightarrow AKHF$  nội tiếp

đường tròn đường kính AH  $\Rightarrow I$  là tâm và AI là bán kính của đường tròn

ngoại tiếp của tứ giác AKHF hay của  $\Delta AFK$ .

Vì BC, (O) cố định  $\Rightarrow M$  cố định  $\Rightarrow OM$  cố định  $\Rightarrow AI = AH/2 = OM$  cố định

$\Rightarrow$  đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta AFK$  có bán kính AI=OM cố định.

Vậy khi A di động trên cung nhỏ PQ (không trùng với P,Q) thì đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AFK$  có bán kính không đổi.

## Bài 22:

Cho đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$ . Gọi C là trung điểm của OA; qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt đường tròn đó tại hai điểm phân biệt M và N. Trên cung nhỏ BM lấy điểm K (K khác B và M), trên tia KN lấy điểm I sao cho  $KI = KM$ . Gọi H là giao điểm của AK và MN. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác BCHK là tứ giác nội tiếp.

2.  $AK \cdot AH = R^2$

3.  $NI = BK$

Giải:

1. Ta có  $\angle AMB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);  $MN \perp AB \Rightarrow \angle AMB + \angle BCH = 90^\circ \Rightarrow$  tứ giác BCHK nội tiếp

2. Ta có

$$\Delta ACH \square \Delta AKB(\text{gg})$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AK}$$

$$\Rightarrow AH.AK = AC.AB = 2R \cdot \frac{1}{2}R = R^2$$

3. Ta có:  $\Delta OAM$  đều (cân tại M và O)

$$\Rightarrow \angle MAB = \angle NAB = \angle MBN = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta MBN, \Delta KMI \text{ đều}$$

Xét  $\Delta KMB$  và  $\Delta IMN$  có:

$$MK = MI \text{ (cạnh tam giác đều KMI)}$$

$$\Rightarrow \angle KMB = \angle IMN$$

(cùng cộng với góc BMI bằng  $60^\circ$ )

$$MB = MN \text{ (cạnh tam giác đều BMN)}$$

$$\Rightarrow \Delta KMB = \Delta IMN(\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow NI = BK$$

### Bài 23 :

Cho đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$  và C là một điểm nằm trên đường tròn sao cho  $CA > CB$ . Gọi I là trung điểm của OA. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại I, cắt tia BC tại M và cắt đoạn AC tại P; AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K.

1/ Chứng minh tứ giác BCPI nội tiếp được trong một đường tròn.

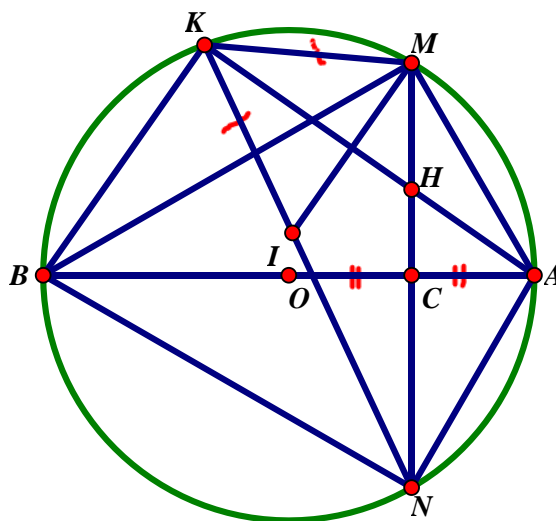
2/ Chứng minh ba điểm B, P, K thẳng hàng.

3/ Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại Q. Tính diện tích của tứ giác QAIM theo R khi  $BC = R$ .

Giải:

a) Tứ giác BCPI nội tiếp (hs tự cm).

b) Dễ thấy MI và AC là hai đường cao của  $\Delta MAB \Rightarrow P$  là trực tâm của  $\Delta MAB \Rightarrow BP$  là đường cao thứ ba  $\Rightarrow BP \perp MA$  (1).



Mặt khác  $AKB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  $\Rightarrow BK \perp MA$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm B, P, Q thẳng hàng.

$$c) AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

Khi  $BC = R$  dễ thấy tam giác OBC là tam giác đều suy ra  $CBA = 60^\circ$

Mà  $QAC = CBA$  (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn AC) do đó  $QAC = 60^\circ$ .

Dễ thấy tam giác QAC cân tại Q ( $QA = QC$ ) có  $QAC = 60^\circ$  nên là tam giác đều  $\Rightarrow AQ = AC = R\sqrt{3}$ .

$$\text{Dễ thấy } AI = \frac{R}{2}; IB = \frac{3R}{2}$$

Trong tam giác vuông  $IBM$  ( $\hat{I} = 90^\circ$ ) ta có  $IM = IB \cdot \tan B = IB \cdot \tan 60^\circ = \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R}{2}$ .

Ta chứng minh được tứ giác QAIM là hình thang vuông ( $AQ \parallel IM; \hat{I} = 90^\circ$ ).

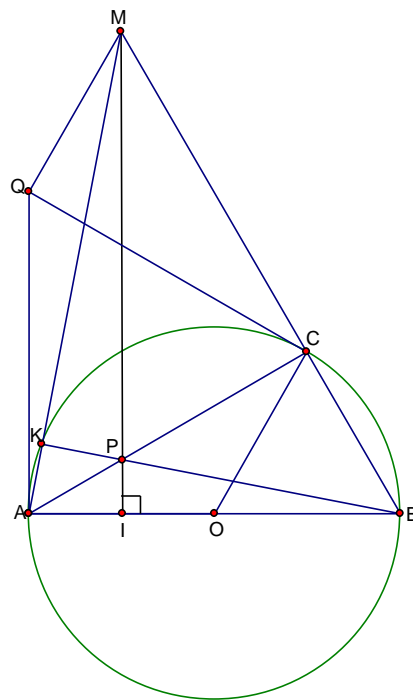
$$\text{Do đó } S_{QAIM} = \frac{1}{2}(AQ + IM)AI = \frac{1}{2}\left(R\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}R}{2}\right) \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{4} \cdot \frac{5R\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}R^2}{8} \text{ (đvdt)}.$$

## Bài 24:

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB (H  $\in$  AB), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Chứng minh rằng:

- Tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp.
- $AM^2 = MK \cdot MB$
- Góc KAC bằng góc OMB
- N là trung điểm của CH.

Giải: (HS tự giải)



**Bài 25:**

Cho đường tròn (O) và một điểm A sao cho  $OA = 3R$ . Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1. Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh  $KA^2 = KN.KP$

3. Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc  $PNM$ .

4. Gọi G là giao điểm của 2 đường thẳng AO và PK. Tính độ dài đoạn thẳng AG theo bán kính R.

Giải:

1) Xét tứ giác APOQ có

$\angle APO = 90^\circ$  (Do AP là tiếp tuyến của (O) ở P)

$\angle AQO = 90^\circ$  (Do AQ là tiếp tuyến của (O) ở Q)

Þ  $\angle APO + \angle AQO = 180^\circ$ , mà hai góc này là 2 góc đối nên tứ giác APOQ là tứ giác nội tiếp

2) Xét  $\triangle AKN$  và  $\triangle PAK$  có  $\angle AKP$  là góc chung

$\angle APN = \angle AMP$  (Góc nt..... cùng chắn cung NP)

Mà  $\angle NAK = \angle AMP$  (so le trong của  $PM \parallel AQ$ )

$\triangle AKN \sim \triangle PAK$  (gg) Þ  $\frac{AK}{PK} = \frac{NK}{AK}$  Þ  $AK^2 = NK.KP$  (đpcm)

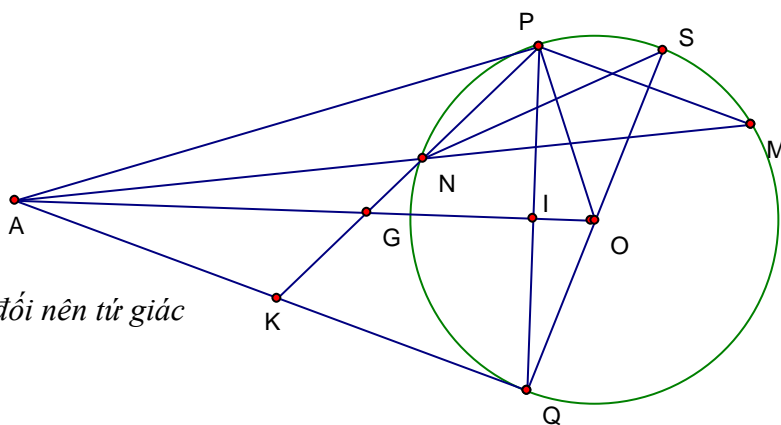
3) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O)

Ta có  $AQ \perp QS$  (AQ là tt của (O) ở Q)

Mà  $PM \parallel AQ$  (gt) nên  $PM \perp QS$

Đường kính QS  $\perp$  PM nên QS đi qua điểm chính giữa của cung PM nhỏ

$\text{sđ} PS = \text{sđ} SM$  Þ  $\angle PNS = \angle SNM$  (hai góc nt chắn 2 cung bằng nhau)



Hay NS là tia phân giác của góc PNM

4) Chứng minh được  $\Delta AQO$  vuông ở Q, có  $QG \perp AO$  (theo Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$OQ^2 = OI \cdot OA \Rightarrow OI = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$$\Rightarrow AI = OA - OI = 3R - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R$$

Do  $\Delta KNQ \sim \Delta KQP$  (gg)  $\Rightarrow KQ^2 = KN \cdot KP$  mà  $AK^2 = NK \cdot KP$  nên  $AK = KQ$

Vậy  $\Delta APQ$  có các trung tuyến AI và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3}R = \frac{16}{9}R$$

### Bài 26 :

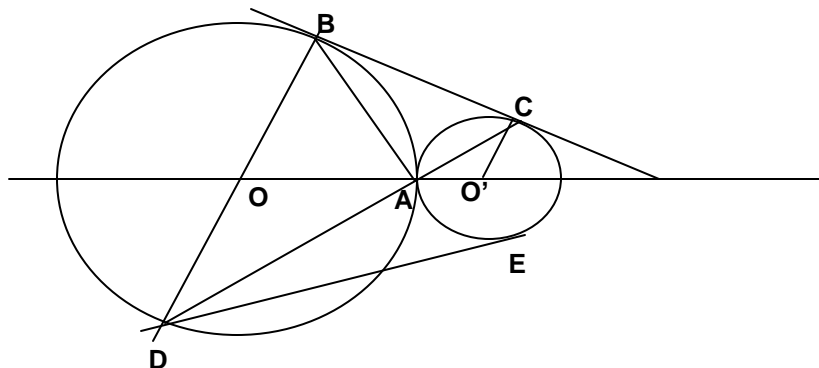
Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, B  $\in$  (O), C  $\in$  (O'). Đường thẳng BO cắt (O) tại điểm thứ hai là D.

1) Chứng minh rằng tứ giác CO'OB là một hình thang vuông.

2) Chứng minh rằng ba điểm A, C, D thẳng hàng.

3) Từ D kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O') (E là tiếp điểm). Chứng minh rằng DB = DE.

Giải:



1) Theo tính chất của tiếp tuyến ta có  $OB \perp BC$ ,  $O'C \perp BC \Rightarrow$  tứ giác  $CO'OB$  là hình thang vuông.

2) Ta có góc  $ABC =$  góc  $BDC \Rightarrow$  góc  $ABC +$  góc  $BCA = 90^\circ \Rightarrow$  góc  $BAC = 90^\circ$

Mặt khác, ta có góc  $BAD = 90^\circ$  (nội tiếp nửa đường tròn)

Vậy ta có góc  $\widehat{DAC} = 180^\circ$  nên 3 điểm D, A, C thẳng hàng.

3) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông DBC ta có  $DB^2 = DA \cdot DC$

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong đường tròn (chứng minh bằng tam giác đồng dạng) ta có  $DE^2 = DA \cdot DC \Rightarrow DB = DE$ .

**Bài 27:** Cho đường tròn  $(O; R)$  (điểm O cố định, giá trị R không đổi) và điểm M nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MB, MC (B, C là các tiếp điểm) của (O) và tia Mx nằm giữa hai tia MO và MC. Qua B kẻ đường thẳng song song với Mx, đường thẳng này cắt (O) tại điểm thứ hai là A. Vẽ đường kính BB' của (O). Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BB', đường thẳng này cắt MC và B'C lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng:

1. 4 điểm M, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn.
2. Đoạn thẳng  $ME = R$ .
3. Khi điểm M di động mà  $OM = 2R$  thì điểm K di động trên một đường tròn cố định, chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

Giải:

1) Chứng minh M, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn

Ta có:  $\angle MOB = 90^\circ$  (vì MB là tiếp tuyến)

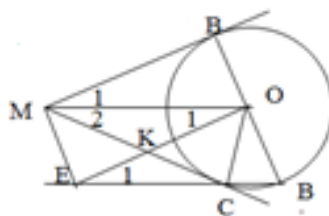
$\angle MCO = 90^\circ$  (vì MC là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \angle MBO + \angle MCO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác MBOC nội tiếp

(vì có tổng 2 góc đối  $= 180^\circ$ )

$\Rightarrow$  4 điểm M, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn



2) Chứng minh  $ME = R$ :

Ta có  $MB \parallel EO$  (vì cùng vuông góc với BB')

$\Rightarrow \angle O_1 = \angle M_1$  (so le trong)

Mà  $\angle M_1 = \angle M_2$  (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)  $\Rightarrow \angle M_2 = \angle O_1$  (1)

C/m được  $MO \parallel EB'$  (vì cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \angle O_1 = \angle E_1 \text{ (so le trong) } (2)$$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow \angle M_2 = \angle E_1 \Rightarrow MOCE$  nội tiếp

$$\Rightarrow \angle MEO = \angle MCO = 90^0$$

$$\Rightarrow \angle MEO = \angle MBO = \angle BOE = 90^0 \Rightarrow MBOE \text{ là hình chữ nhật}$$

$$\Rightarrow ME = OB = R \text{ (điều phải chứng minh)}$$

3) Chứng minh khi  $OM=2R$  thì  $K$  di động trên 1 đường tròn cố định:

Chứng minh được Tam giác  $MBC$  đều  $\Rightarrow \angle BMC = 60^0$

$$\Rightarrow \angle BOC = 120^0$$

$$\Rightarrow \angle KOC = 60^0 - \angle O_1 = 60^0 - \angle M_1 = 60^0 - 30^0 = 30^0$$

Trong tam giác  $KOC$  vuông tại  $C$ , ta có:

$$\cos KOC = \frac{OC}{OK} \Rightarrow OK = \frac{OC}{\cos 30^0} = R : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

Mà  $O$  cố định,  $R$  không đổi  $\Rightarrow K$  di động trên đường tròn tâm  $O$ , bán kính =

$$\frac{2\sqrt{3}R}{3} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

## Bài 28:

Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm  $O$  ( $AB < AC$ ). Hai tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $M$ .  $AM$  cắt đường tròn ( $O$ ) tại điểm thứ hai  $D$ .  $E$  là trung điểm đoạn  $AD$ .  $EC$  cắt đường tròn ( $O$ ) tại điểm thứ hai  $F$ . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác  $OEBM$  nội tiếp.
- 2)  $MB^2 = MA.MD$ .
- 3)  $BFC = MOC$ .
- 4)  $BF \parallel AM$

Giải:

- 1) Ta có  $EA = ED$  (gt)  $\Rightarrow OE \perp AD$  (Quan hệ giữa đường kính và dây)  
 $\Rightarrow OEM = 90^0$ ;  $OBM = 90^0$  (Tính chất tiếp tuyến)

$E$  và  $B$  cùng nhìn  $OM$  dưới một góc vuông  $\Rightarrow$  Tứ giác  $OEBM$  nội tiếp.



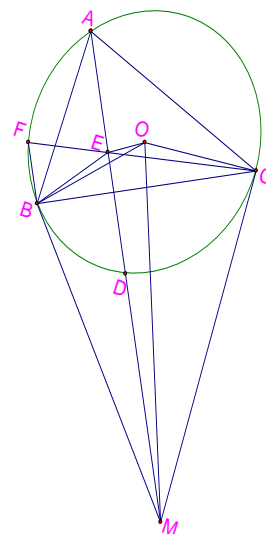
2) Ta có  $\angle MBD = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD}$  ( góc nội tiếp chắn cung BD)

$\angle MAB = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD}$  ( góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BD)

$\Rightarrow \angle MBD = \angle MAB$ . Xét tam giác MBD và tam giác MAB có:

Góc M chung,  $\angle MBD = \angle MAB \Rightarrow \triangle MBD$  đồng dạng với  $\triangle MAB \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MB}$

$$\Rightarrow MB^2 = MA \cdot MD$$



1) Ta có:  $\angle MOC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC}$  ( Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);  $\angle BFC = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC}$  (góc nội tiếp)  $\Rightarrow \angle BFC = \angle MOC$ .

2) Tứ giác MFOC nội tiếp (  $\angle F + \angle C = 180^\circ$ )  $\Rightarrow \angle MFC = \angle MOC$  ( hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC), mặt khác  $\angle MOC = \angle BFC$  (theo câu 3)  $\Rightarrow \angle BFC = \angle MFC \Rightarrow BF \parallel AM$ .

### Bài 29:

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho  $AC < BC$  ( $C \neq A$ ). Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau ở điểm D, AD cắt (O) tại E ( $E \neq A$ ).

1) Chứng minh  $BE^2 = AE \cdot DE$ .

2) Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại H, DO cắt BC tại F. Chứng minh tứ giác CHOF nội tiếp.

3) Gọi I là giao điểm của AD và CH. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Giải:

1)

Vì BD là tiếp tuyến của (O) nên  $BD \perp OB \Rightarrow \triangle ABD$  vuông tại B

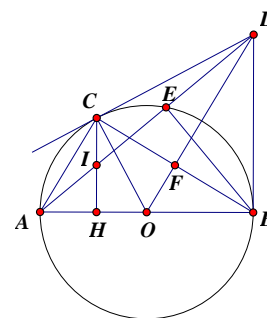
Vì AB là đường kính của (O) nên  $AE \perp BE$

Áp dụng hệ thức lượng trong  $\triangle ABD$  ( $\angle ABD = 90^\circ$ ;  $BE \perp AD$ ) ta có  $BE^2 = AE \cdot DE$

2)

Có  $DB = DC$  (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau),  $OB = OC$  (bán kính của (O))

$\Rightarrow OD$  là đường trung trực của đoạn  $BC \Rightarrow OFC = 90^\circ$  (1)



Có  $CH \parallel BD$  (gt), mà  $AB \perp BD$  (vì  $BD$  là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow OHC = 90^\circ$  (2)

Từ (1) và (2) ta có  $OFC + OHC = 180^\circ \Rightarrow$  tứ giác  $CHOF$  nội tiếp

3)

Có  $CH \parallel BD \Rightarrow HCB = CBD$  (hai góc ở vị trí so le trong) mà

$\triangle ABC$  cân tại  $D \Rightarrow CBD = DCB$  nên  $CB$  là tia phân giác của  $HCD$

do  $CA \perp CB \Rightarrow CA$  là tia phân giác góc ngoài đỉnh  $C$  của  $\triangle ICD \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{CI}{CD}$  (3)

Trong  $\triangle ABD$  có  $HI \parallel BD \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{HI}{BD}$  (4)

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow \frac{CI}{CD} = \frac{HI}{BD}$  mà  $CD = BD \Rightarrow CI = HI \Rightarrow I$  là trung điểm của  $CH$

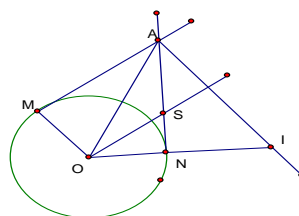
### Bài 30:

Trên đường tròn (O) lấy hai điểm M, N sao cho M, O, N không thẳng hàng. Hai tiếp tuyến tại M, N với đường tròn (O) cắt nhau tại A. Từ O kẻ đường vuông góc với OM cắt AN tại S. Từ A kẻ đường vuông góc với AM cắt ON tại I. Chứng minh:

a)  $SO = SA$

b) Tam giác OIA cân

Giải:



**a) Chứng minh:  $SA = SO$**

Vì AM, AN là các tiếp tuyến nên:  $MAO = SAO$  (1)

Vì MA//SO nên:  $MAO = SOA$  (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $SAO = SOA \Rightarrow \Delta SAO$  cân  $\Rightarrow SA = SO$  (đ.p.c.m)

**b) Chứng minh tam giác OIA cân**

Vì AM, AN là các tiếp tuyến nên:  $MOA = NOA$  (3)

Vì MO//AI nên:  $MOA = OAI$  (so le trong) (4)

Từ (3) và (4) ta có:  $IOA = IAO \Rightarrow \Delta OIA$  cân (đ.p.c.m)

**Bài 31:**

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A, C); BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1) Chứng minh CBKH là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh  $\angle ACM = \angle ACK$

3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho  $BE = AM$ . Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C

4) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A; cho P là điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và  $\frac{AP.MB}{MA} = R$ . Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK

Giải:

1) Ta có  $\angle HCB = 90^\circ$  (do chắn nửa đường tròn đk AB)  
 $\angle HKB = 90^\circ$  (do K là hình chiếu của H trên AB)



$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{tam giác AMS vuông tại M.} &\Rightarrow PAM + PSM = 90^\circ \\ \text{và } PMA + PMS &= 90^\circ \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \text{tam giác AMS vuông tại M.} \\ \text{và } PMA + PMS = 90^\circ \end{aligned}} \right\} \Rightarrow PMS = PSM \Rightarrow PS = PM \quad (4)$$

Mà  $PM = PA$  (cmt) nên  $PAM = PMA$

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow PA = PS$  hay P là trung điểm của AS.

Vì  $HK \parallel AS$  (cùng vuông góc AB) nên theo ĐL Ta-lét, ta có:  $\frac{NK}{PA} = \frac{BN}{BP} = \frac{HN}{PS}$  hay  $\frac{NK}{PA} = \frac{HN}{PS}$

mà  $PA = PS$  (cmt)  $\Rightarrow NK = NH$  hay BP đi qua trung điểm N của HK. (đpcm)

### Bài 32:

Cho đường tròn (O) có tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F (ME < MF). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

a) Chứng minh rằng  $MA \cdot MB = ME \cdot MF$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính MF; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF. Chứng minh rằng đường thẳng MS vuông góc với đường thẳng KC.

c) Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS. Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

### Giải:

a) Vì ta có do hai tam giác đồng dạng MAE và MBF

$$\text{Nên } \frac{MA}{ME} = \frac{MF}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = ME \cdot MF \text{ (Phương tích của M đối với đường tròn tâm O)}$$

b) Do hệ thức lượng trong đường tròn ta có  $MA \cdot MB = MC^2$ , mặt khác hệ thức lượng trong tam giác vuông MCO ta có  $MH \cdot MO = MC^2 \Rightarrow MA \cdot MB = MH \cdot MO$  nên tứ giác AHOB nội tiếp trong đường tròn.

Xét tứ giác MKSC nội tiếp trong đường tròn đường kính MS (có hai góc K và C vuông). Vậy ta có:  $MK^2 = ME \cdot MF = MC^2$  nên  $MK = MC$ . Do đó MS chính là đường trung trực của KC nên MS vuông góc với KC tại V.

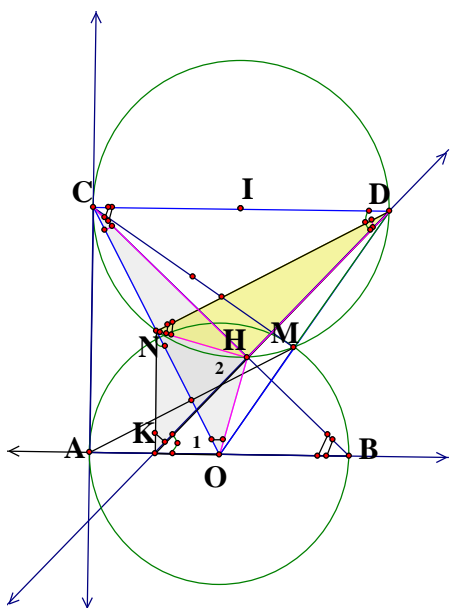
c) Do hệ thức lượng trong tam giác MCS ta có  $MC^2 = MV \cdot MS \Rightarrow MA \cdot MB = MV \cdot MS$  nên S, V thuộc đường tròn tâm Q.

Tương tự với ta cũng có  $MC^2 = MV \cdot MS = ME \cdot MF$  nên S, V thuộc đường tròn tâm P từ đó dây chung SV vuông góc đường nối tâm PQ và là đường trung trực của VS (đường nối hai tâm của hai đường tròn). Nên PQ cũng đi qua trung điểm của KS (do định lý trung bình của tam giác SKV). Vậy 3 điểm T, Q, P thẳng hàng.

**Bài 33:** Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là một điểm thuộc (O) (M khác A và B). Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đường kính của (I). Chứng minh rằng:

1. Ba điểm O, M, D thẳng hàng
2. Tam giác COD là tam giác cân
3. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O)

**Giải:**



1. Ba điểm O, M, D thẳng hàng:

Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn (O)  $\Rightarrow MC \perp MO$  (1)

Xét đường tròn (I) : Ta có  $\angle CMD = 90^\circ \Rightarrow MC \perp MD$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MO \parallel MD \Rightarrow MO$  và  $MD$  trùng nhau

$\Rightarrow O, M, D$  thẳng hàng

2. Tam giác COD là tam giác cân

CA là tiếp tuyến của đường tròn (O)  $\Rightarrow CA \perp AB$  (3)

Đường tròn (I) tiếp xúc với AC tại C  $\Rightarrow CA \perp CD$  (4)

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow CD \parallel AB \Rightarrow \angle DCO = \angle COA$  (\*)

( Hai góc so le trong)

CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O)  $\Rightarrow \angle COA = \angle COD$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow \angle DOC = \angle DCO \Rightarrow$  Tam giác COD cân tại D

3. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O)

\* Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H.  $\angle CHD = 90^\circ \Rightarrow H \in (I)$  (Bài toán quỹ tích)

DH kéo dài cắt AB tại K.

Gọi N là giao điểm của CO và đường tròn (I)

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle CND = 90^\circ \\ \triangle COD \text{ cân tại D} \end{cases} \Rightarrow NC = NO$$

Ta có tứ giác NHOK nội tiếp

Vì có  $\angle H_2 = \angle O_1 = \angle DCO$  ( Cùng bù với góc DHN)  $\Rightarrow \angle NHO + \angle NKO = 180^\circ$  (5)

\* Ta có :  $\angle NDH = \angle NCH$  (Cùng chắn cung NH của đường tròn (I))

$$\angle CBO = \angle HND (= \angle HCD) \Rightarrow \triangle DHN \simeq \triangle COB \text{ (g.g)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \frac{HN}{HD} &= \frac{OB}{OC} \\ \dots \Rightarrow \frac{OB}{OC} &= \frac{OA}{OC} \\ \dots \Rightarrow \frac{OA}{OC} &= \frac{CN}{CD} = \frac{ON}{CD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{ON}{CD} \text{ Mà } \angle ONH = \angle CDH$$

$$\Rightarrow \triangle NHO \sim \triangle DHC \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \angle NHO = 90^\circ$  Mà  $\angle NHO + \angle NKO = 180^\circ$  (5)  $\Rightarrow \angle NKO = 90^\circ$ ,  $\Rightarrow NK \perp AB \Rightarrow NK \parallel AC \Rightarrow K$  là trung điểm của  $OA$  cố định  $\Rightarrow$  (ĐPCM)

### Bài 34:

Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ , đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AH$ , đường tròn này cắt các cạnh  $AB$ ,  $AC$  theo thứ tự tại  $D$  và  $E$ .

1/ Chứng minh tứ giác  $BDEC$  là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2/ Chứng minh 3 điểm  $D$ ,  $O$ ,  $E$  thẳng hàng.

3/ Cho biết  $AB = 3$  cm,  $BC = 5$  cm. Tính diện tích tứ giác  $BDEC$ .

Giải:

1/ Nối  $H$  với  $E$ .

+  $\angle HEA = 90^\circ$  (vì  $AH$  là đường kính),  $\angle AHC = 90^\circ$  ( $AH$  là đường cao)

$$\Rightarrow \angle AHE = \angle ACB \text{ (cùng phụ với } \angle EHC) \quad (1)$$

$$+ \angle ADE = \angle AHE \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } AE) \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \angle ADE = \angle ACB \Rightarrow$  Tứ giác  $BDEC$  nội tiếp đường tròn (có góc đối bằng góc kề bù góc đối)

2/ Vì  $\angle DAE = 90^\circ \Rightarrow DE$  là đường kính  $\Rightarrow D, O, E$  thẳng hàng (đpcm).

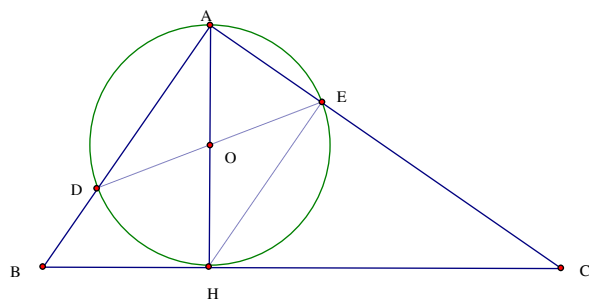
3/ Ta có  $S_{BDEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE}$

+  $\triangle ABC$  vuông có  $AH$  là đường cao:



$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4\text{cm} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$DE = AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5} \text{ (cm)} \text{ (cùng là đường kính đi O).}$$



+  $\triangle ADE$  và  $\triangle ABC$  có :  $\angle A$  chung ,  $\angle ADE = \angle ACB$  ( câu 1)

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$  (g.g)  $\Rightarrow$  tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ đồng dạng :

$$\Leftrightarrow \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \Leftrightarrow S_{\triangle AED} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot DE^2}{BC^2}$$

$$+ S_{BDEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \left(1 - \frac{DE^2}{BC^2}\right) = 6 \left(1 - \frac{12^2}{5^2 \cdot 5^2}\right) = 4,6176 \text{ (cm}^2\text{)}$$

**Bài 35:** Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) với đường tròn (O). Đoạn thẳng OM cắt AB và (O) theo thứ tự tại H và I.

Chứng minh rằng:

- Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn
- $MC \cdot MD = MA^2$
- $OH \cdot OM + MC \cdot MD = MO^2$
- CI là tia phân giác góc MCH

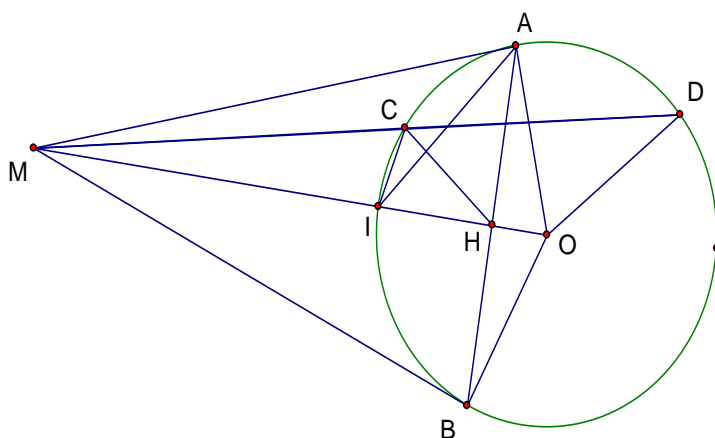
Giải:

a) Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O)

nên  $\angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$

suy ra A, B cùng nằm trên đường

tròn đường kính MO hay tứ giác



MAOB nội tiếp.

b)  $\triangle MAC \square \triangle MDA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MC.MD \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có :  $OM.OH = OA^2$  (Theo hệ thức lượng)

$$MC.MD = MA^2 \text{ (cm trên)}$$

$$\text{Suy ra : } OM.OH + MC.MD = OA^2 + MA^2 = OM^2$$

$$\text{Vậy } OM.OH + MC.MD = OM^2 \text{ (đpcm)}$$

d) Dễ thấy :  $MH.MO = MC.MD (= MA^2)$

$$\Rightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO} \text{ kết hợp với } \angle DMO \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle MCH \square \triangle MOD \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{CH} = \frac{MO}{OD} = \frac{MO}{OA} \text{ hay } \frac{MC}{CH} = \frac{MO}{OA} \quad (1)$$

Ta có :  $\angle MAI = \angle IAH$  (2 góc cùng chắn 2 cung bằng nhau )

$\Rightarrow AI$  là phân giác của góc  $MAH$ . Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có:

$$\frac{MI}{IH} = \frac{MA}{AH} \quad (2)$$

Xét  $\triangle MHA$  và  $\triangle MAO$  có :  $\angle OMA$  chung

$$\angle MHA = \angle MAO = 90^0$$

Do đó :  $\triangle MHA \square \triangle MAO$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MO}{OA} = \frac{MA}{AH} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra :  $\frac{MC}{CH} = \frac{MI}{IH}$  suy ra  $CI$  là tia phân giác của góc  $MCH$  (đpcm)

**Bài 36:** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH ( $H \in BC$ ). Dựng đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB tại E, cắt AC tại F. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại E và F lần lượt cắt cạnh BC tại M và N.

1. Chứng minh rằng:
  - a. Tứ giác MEOH nội tiếp được trong một đường tròn
  - b.  $AB \cdot HE = AH \cdot HB$
  - c. Ba điểm E, O, F thẳng hàng
2. Cho  $AB = 2\sqrt{10}cm$ ,  $AH = 2\sqrt{6}cm$ . Tính diện tích tam giác OMN.

Giải:

**1.a)**  $\angle OEM + \angle OHM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  nên tứ giác OEHM nội tiếp được trong một đường tròn.

**1.b)**  $2S_{ABH} = HE \cdot AB = AH \cdot AB$ .  $\triangle ABH$  vuông có đường cao HE.

**1.c)** Tứ giác AEHF có  $\angle A = \angle E = \angle H = 90^\circ$  nên là hình chữ nhật  $\Rightarrow AH = EF$  mà AH là đường kính nên EF cũng là đường kính  $\Rightarrow E, O, F$  thẳng hàng.

**2)** Ta có  $ME = MH$  ( tính chất hai tiếp tuyến) và  $OE = OH = R$  nên OM là trung trực của EH

Ta lại có  $OA = OH$  nên OM là đường trung bình của tam giác AHB  $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{10}$

Tam giác ABC vuông tại A nên:  $\frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{24} - \frac{1}{40} = \frac{16}{24 \cdot 40} \Rightarrow AC = 2\sqrt{15}$

Tương tự ON là đường trung bình của tam giác HAC nên  $ON = \frac{1}{2}AC = \sqrt{15}$

Tam giác OMN có  $OM \perp ON$  ( vì  $AB \perp AC$  ) nên  $S_{OMN} = \frac{1}{2}OM \cdot ON = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \frac{5\sqrt{6}}{2}cm^2$

**Bài 37:**

Cho đường tròn tâm O, đường kính  $AC = 2R$ . Từ một điểm E ở trên đoạn OA (E không trùng với A và O). Kẻ dây BD vuông góc với AC. Kẻ đường kính DI của đường tròn (O).

- a) Chứng minh rằng:  $AB = CI$ .
- b) Chứng minh rằng:  $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$
- c) Tính diện tích của đa giác ABICD theo R khi  $OE = \frac{2R}{3}$

Giải:

a) Chứng minh rằng:  $AB = CI$ .

Ta có:  $BD \perp AC$  (gt)

$\angle DBI = 90^\circ$  ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  $\Rightarrow BD \perp BI$

Do đó:  $AC \parallel BI \Rightarrow AB = CI \Rightarrow AB = CI$

b) Chứng minh rằng:  $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$

Vì  $BD \perp AC \Rightarrow AB = AD$  nên  $AB = AD$

Ta có:  $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + CD^2 = AD^2 + CD^2 = AC^2 = (2R)^2 = 4R^2$

c) Tính diện tích của đa giác ABICD theo R khi  $OE = \frac{2R}{3}$

$$S_{ABICD} = S_{ABD} + S_{ABIC} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot EB \cdot (BI + AC)$$

$$* OE = \frac{2R}{3} \Rightarrow AE = \frac{R}{3} \text{ và } EC = \frac{2R}{3} + R = \frac{5R}{3}$$

$$* DE^2 = AE \cdot EC = \frac{R}{3} \cdot \frac{5R}{3} = \frac{5R^2}{9} \Rightarrow DE = \frac{R\sqrt{5}}{3}. \text{ Do đó: } EB = \frac{R\sqrt{5}}{3}$$

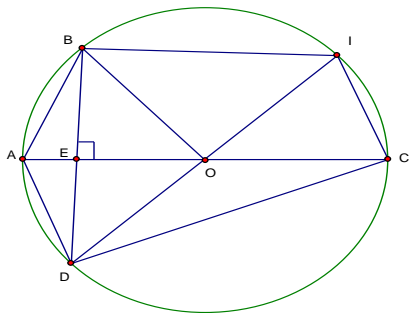
$$* BI = AC - 2AE = 2R - 2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$$

$$\text{Vậy: } S_{ABICD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{5}}{3} \cdot 2R + \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{5}}{3} \cdot \left(\frac{4R}{3} + 2R\right) = \frac{R\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{16R}{3} = \frac{8R^2\sqrt{5}}{9} \text{ (đvdt)}$$

**Bài 38:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$  và tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B).

a) Chứng minh AMOC là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh AMDE là tứ giác nội tiếp đường tròn.



c) Chứng minh  $\angle ADE = \angle ACO$

Giải:

a)  $\angle MAO = \angle MCO = 90^\circ$  nên tứ giác AMCO nội tiếp

b)  $\angle MEA = \angle MDA = 90^\circ$ . Tứ giác AMDE có

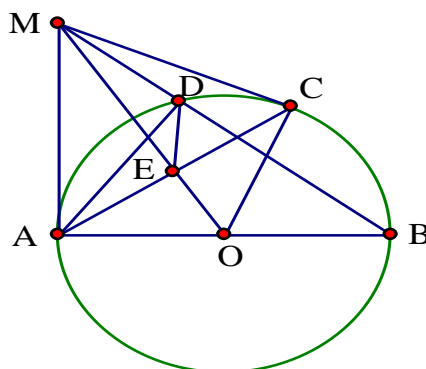
D, E cùng nhìn AM dưới cùng một góc  $90^\circ$

Nên AMDE nội tiếp

c) Vì AMDE nội tiếp nên  $\angle ADE = \angle AME$  cùng chắn cung AE

Vì AMCO nội tiếp nên  $\angle ACO = \angle AME$  cùng chắn cung AO

Suy ra  $\angle ADE = \angle ACO$



**Bài 39:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm), tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của AD và OE, K là giao điểm của BE với đường tròn (O) (K không trùng với B).

1) Chứng minh  $AE^2 = EK \cdot EB$ .

2) Chứng minh 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M.

Chứng minh  $\frac{AE}{EM} - \frac{EM}{CM} = 1$ .

Giải:

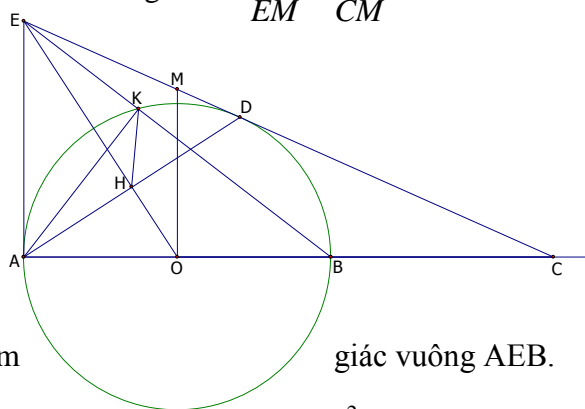
1) Chứng minh  $AE^2 = EK \cdot EB$ .

+ Chỉ ra tam giác AEB vuông tại A.

+ Chỉ ra góc  $\angle AKB = 90^\circ$  suy ra AK là đường cao của tam

+ Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

ta có  $AE^2 = EK \cdot EB$



2) Chứng minh 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn.

+ Chỉ ra tứ giác AHKE nội tiếp suy ra góc EHK = góc EAK

+ Chỉ ra góc EAK = góc EBA

+ Suy ra tứ giác BOHK nội tiếp suy ra 4 điểm B, O, H, K cùng thuộc một đường tròn

3) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M. Chứng minh  $\frac{AE}{EM} - \frac{EM}{CM} = 1$ .

+ Chỉ ra tam giác OEM cân tại E suy ra ME = MO.

+ Chỉ ra OM // AE, áp dụng định lý ta – lét trong tam giác CEA ta có  $\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{OM}$

+ Ta có  $\frac{CE}{CM} = \frac{AE}{OM} \Rightarrow \frac{CE - CM}{CM} = \frac{AE - OM}{OM} \Rightarrow \frac{EM}{CM} = \frac{AE}{OM} - 1 \Rightarrow \frac{AE}{OM} - \frac{EM}{CM} = 1$

Mà ME = MO nên suy ra  $\frac{AE}{EM} - \frac{EM}{CM} = 1$  (đpcm)

#### Bài 40:

Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC, CD lần lượt lấy điểm E, F sao cho  $\angle EAF = 45^\circ$ . Biết BD cắt AE, AF theo thứ tự tại G, H. Chứng minh:

- ADFG, GHFE là các tứ giác nội tiếp
- $\triangle CGH$  và tứ giác GHFE có diện tích bằng nhau

Giải:

a) (Hình 2)

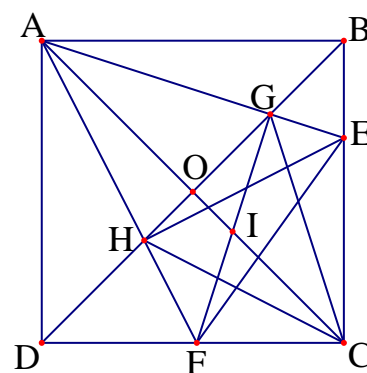
\*) Chứng minh tứ giác ADFG nội tiếp.

ABCD là hình vuông nên  $\angle BDC = \angle DBC = 45^\circ$

Xét tứ giác ADFG có :

$$\angle GAF = \angle EAF = 45^\circ \text{ và } \angle GDF = \angle BDC = 45^\circ.$$

Hai đỉnh liên tiếp A và D cùng nhìn cạnh GF dưới một góc bằng  $45^\circ$  nên tứ giác ADFG nội tiếp.



Hình 2

\*) Chứng minh tứ giác GHFE nội tiếp.

Chứng minh tương tự như trên ta có tứ giác ABEH nội tiếp.

Tứ giác ADFG nội tiếp nên  $\angle AGF + \angle ADF = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle AGF = 180^\circ - \angle ADF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle EGF = 90^\circ.$$

Tứ giác ABEH nội tiếp nên  $\angle AHE + \angle ABE = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle AHE = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle EHF = 90^\circ.$$

Xét tứ giác GHFE có hai đỉnh liên tiếp G và H cùng nhìn cạnh EF dưới một góc  $90^\circ$  nên là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AC và GF.

Tứ giác ABCD là hình vuông nên đường chéo BD là trục đối xứng của AC  $\Rightarrow GA = GC,$

HA = HC. Do đó  $\triangle AGH = \triangle CGH$  (c-c-c)  $\Rightarrow S_{AGH} = S_{CGH}$

$\triangle AGF$  vuông cân tại G (vì  $\angle AGF = 90^\circ$  và  $\angle GAF = 45^\circ$ ) nên  $\angle GFA = 45^\circ$ ; ABCD là hình vuông nên  $\angle ECA = \angle BCA = 45^\circ$ . Suy ra  $\angle GFA = \angle ECA (= 45^\circ)$ .

Mặt khác,  $\triangle AGI$  vuông tại G có  $GO \perp AI$  (vì  $BD \perp AC$ , BD là đường trung trực của AC) nên  $\angle GAI = \angle EGI$  (vì cùng phụ với  $\angle AGO$ ) hay  $\angle EAC = \angle HGF$ .

Xét  $\triangle AEC$  và  $\triangle GHF$  có  $\angle GFA = \angle ECA$  và  $\angle GAI = \angle HGF$  (chứng minh trên) nên  $\triangle AEC \sim \triangle GHF$  (g.g). Suy ra:  $\frac{AE}{GH} = \frac{AC}{GF} \Rightarrow AE \cdot GF = AC \cdot GH$  (1)

Tứ giác AGCH có hai đường chéo vuông góc ( $AC \perp GH$ ) nên  $S_{AGCH} = \frac{1}{2} AC \cdot GH$  (2)

$\triangle AEF$  có đường cao FG ứng với cạnh AE nên  $S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot GF$  (3) Từ

(1), (2) và (3) suy ra:  $S_{AGCH} = S_{AEF} \Leftrightarrow S_{AGH} + S_{CGH} = S_{AGH} + S_{GHFE}$

$$\Rightarrow S_{CGH} = S_{GHFE} \text{ (đpcm)}$$

**Bài 41:**

Cho  $\triangle ABC$  không cân, đường cao  $AH$ , nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $E, F$  thứ tự là hình chiếu của  $B, C$  lên đường kính  $AD$  của đường tròn  $(O)$  và  $M, N$  thứ tự là trung điểm của  $BC, AB$ . Chứng minh:

a) Bốn điểm  $A, B, H, E$  cùng nằm trên đường tròn tâm  $N$  và  $HE \parallel CD$ .

b)  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle HEF$ .

Giải:

a) (H. 3)

CM bốn điểm  $A, B, H, E$  cùng thuộc đường tròn tâm  $N$ .

Vì  $\angle AEB = \angle AHB = 90^\circ$  nên  $H, E$  cùng nằm trên đường tròn đường kính  $AB$ . Mà  $N$  là trung điểm của  $AB$ .

Suy ra bốn điểm  $A, B, H, E$  cùng thuộc đường tròn tâm  $N$ , bán kính  $\frac{AB}{2}$ .

Chứng minh  $HE \parallel CD$ :

Tứ giác  $ABHE$  nội tiếp đường tròn tâm  $N$ , nên :

$$\angle BAE + \angle BHE = 180^\circ \text{ (tổng 2 góc đối của tứ giác nội tiếp),}$$

$$\text{mà } \angle EHC + \angle BHE = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \angle BAE = \angle EHC \text{ (cùng bù với } \angle BHE) \quad \text{hay } \angle BAD = \angle EHC \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \angle BCD = \angle BAD \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } BD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\angle BCD = \angle EHC$ .

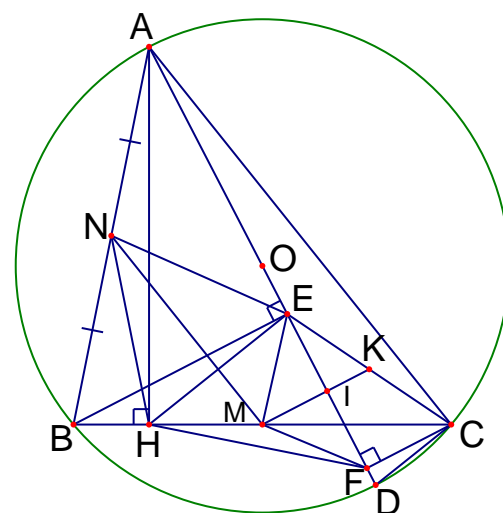
Hai góc này ở vị trí so le trong nên  $HE \parallel CD$ .

b) Gọi  $K$  là trung điểm của  $EC$ ,  $I$  là giao điểm của  $MC$  với  $ED$ .

$\triangle BCE$  có  $MB = MC$  (gt),  $KE = KC$  (cách dựng) nên  $MK$  là đường trung bình.

$$\Rightarrow MK \parallel BE; \text{ mà } BE \perp AD \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow MK \perp AD \text{ (quan hệ vuông góc-song song) hay } MK \perp ED \quad (3)$$



Hình 3



Lại có  $CF \perp AD$  (gt)  $\Rightarrow MK \parallel CF$  hay  $KI \parallel CF$ .

$\triangle ECF$  có  $KI \parallel CF$ ,  $KE = KC$  nên  $IE = IF$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $MK$  là đường trung trực của  $EF \Rightarrow ME = MF$  (5)

Xét  $\triangle ABC$  có  $MB = MC$ ,  $NB = NA$  (gt) nên  $MN$  là đường trung bình  $\Rightarrow NM \parallel AC$ .

Ta lại có  $HE \parallel CD$  (câu a)),  $\angle ACD = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) hay  $AC \perp CD$  nên  $HE \perp AC$  (quan hệ vuông góc-song song)

Suy ra  $NM \perp HE$  (vì  $NM \parallel AC$ ,  $HE \perp AC$ ).

Xét đường tròn tâm N có  $HE$  là dây cung,  $NM \perp HE$  nên  $NM$  đi qua trung điểm của  $HE$ .

Do đó  $NM$  là đường trung trực của  $HE$ . Suy ra  $MH = ME$  (6)

Từ (5) và (6) suy ra  $MH = ME = MF$ .

Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle HEF$ .

#### Bài 42:

Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Gọi  $H$  là điểm chính giữa cung  $AB$ ;  $M$  là một điểm nằm trên cung  $AH$ ,  $N$  là một điểm nằm trên dây cung  $BM$  sao cho  $BN = AM$ . Chứng minh:

- $\triangle AMH = \triangle BNH$ .
- $\triangle MHN$  là tam giác vuông cân.
- Khi  $M$  chuyển động trên cung  $AH$  thì đường vuông góc với  $BM$  kẻ từ  $N$  luôn đi qua một điểm cố định ở trên tiếp tuyến của nửa đường tròn tại điểm  $B$ .

Giải:

a) Dễ thấy  $\angle AHB = \angle AMB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và  $HA = HB$  (vì  $H$  nằm chính giữa cung  $AB$ ).

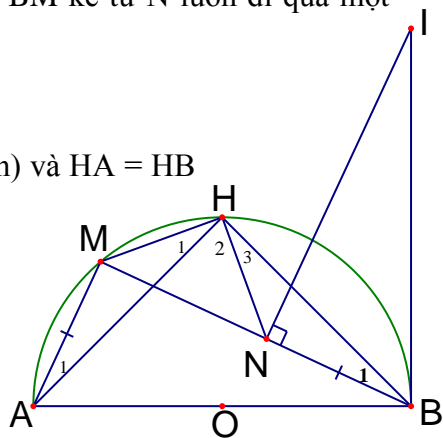
Xét  $\triangle AMH$  và  $\triangle BNH$  có :

$AM = BN$  (giả thiết)

$\angle A_1 = \angle B_1$  (hai góc nội tiếp cùng chắn  $MH$ )

$HA = HB$  (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle BNH$  (c.g.c)



b) Vì  $\triangle AMH = \triangle BNH$  (chứng minh trên) nên  $HM = HN$  và  $H_1 = H_3$

$\triangle MHN$  có  $\angle MHN = H_1 + H_2 = H_3 + H_2 = \angle AHB = 90^\circ$  và  $HM = HN$  nên là tam giác vuông cân tại H.

c) Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến của (O) tại B và đường thẳng vuông góc với BM tại N là I.  
Xét  $\triangle AMB$  và  $\triangle MNI$  có :

$$\angle AMB = \angle BNI = 90^\circ$$

$$AM = BN \text{ (giả thiết)}$$

$$\angle MAB = \angle NBI \left( = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BHM} \right)$$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle MNI \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = BI.$$

Do AB cố định nên tiếp tuyến tại B cố định  $\Rightarrow I$  cố định.

Vậy khi M chuyển động trên cung AH thì đường vuông góc với BM kẻ từ N luôn đi qua một điểm cố định ở trên tiếp tuyến của nửa đường tròn tại điểm B.

#### Bài 43:

Cho (O) đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O') đường kính BC. Gọi M là trung điểm đoạn AB. Từ M kẻ dây cung  $DE \perp AB$ . Gọi I là giao của DC với (O'). Chứng minh rằng :

a) ADBE là hình thoi.

b)  $BI \parallel AD$ .

c) I, B, E thẳng hàng .

Giải:

a)  $AC \perp DE$  tại M  $\Rightarrow M$  là trung điểm của DE.

Tứ giác ADBE có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình thoi.

b) Dễ thấy  $\angle ADC = \angle BIC = 90^\circ \Rightarrow AD \perp CD, BI \perp CD$

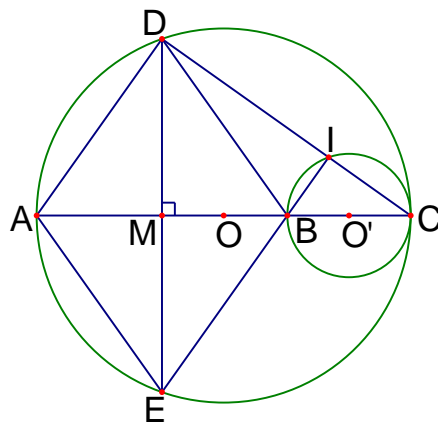
Do đó  $BI \parallel AD$ .

c) Ta có  $EB \parallel AD$  (vì ADBE là hình thoi) và  $AD \perp CD$  nên  $EB \perp CD$ .

Qua B có EB và BI cùng vuông góc với CD nên E, B, I thẳng hàng

ĐC 1: 246 Mã Lò – Bình Tân – HCM -

ĐC 2: 448 Tân Phước – Q11 – HCM 50



**Bài 44:**

Trên đường thẳng  $d$  lấy ba điểm  $A, C, B$  theo thứ tự đó. Trên nửa mặt phẳng bờ  $d$  kẻ hai tia  $Ax, By$  cùng vuông góc với  $d$ . Trên tia  $Ax$  lấy  $I$ . Tia vuông góc với  $CI$  tại  $C$  cắt  $By$  tại  $K$ . Đường tròn đường kính  $IC$  cắt  $IK$  tại  $P$ .

- Chứng minh tứ giác  $BCPK$  nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh:  $AI.BK = AC.CB$
- Giả sử  $A, B, I$  cố định. Hãy xác định vị trí điểm  $C$  sao cho diện tích hình thang vuông  $ABKI$  max.

Giải:

- Vì  $P$  thuộc đường tròn đường kính  $IC$  nên

$$\angle CPI = 90^\circ \Rightarrow \angle CPK = 90^\circ$$

Tứ giác  $BCPK$  có:  $\angle CPK + \angle CBK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

nên nội tiếp được đường tròn.

- Vì  $\angle ICP = 90^\circ \Rightarrow \angle C_1 + \angle C_2 = 90^\circ$ .

Mà  $\angle K_1 + \angle C_2 = 90^\circ$  (vì  $\triangle KBC$  vuông tại  $B$ )

$$\Rightarrow \angle C_1 = \angle K_1$$

Xét  $\triangle IAC$  và  $\triangle CBK$  có:  $\angle IAC = \angle KBC = 90^\circ$ ,  $\angle C_1 = \angle K_1$  (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle IAC \sim \triangle CBK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{BC} = \frac{AC}{BK} \Rightarrow AI.BK = AC.BC \text{ (đpcm)}.$$

$$c) S_{ABKI} = \frac{AB}{2} \cdot (BK + AI), \quad BK = \frac{AC.BC}{AI}$$

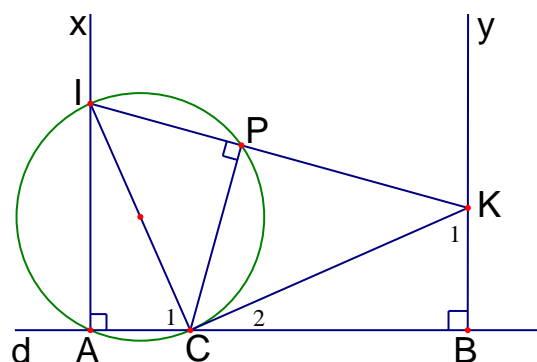
Vì  $AB$  và  $AI$  không đổi (do  $A, B, I$  cố định) nên  $S_{ABKI}$  max

$$\Leftrightarrow BK \text{ max} \Leftrightarrow AC.BC \text{ max}.$$

Do tổng  $AC + BC = AB$  không đổi nên  $AC.BC$  max

$$\Leftrightarrow AC = BC \Leftrightarrow C \text{ là trung điểm của } AB.$$

Vậy để diện tích hình thang vuông  $ABKI$  max thì  $C$  phải là trung điểm của  $AB$ .



**Bài 45**

Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SA, SB và cát tuyến SCD của đường tròn đó.

- Gọi E là trung điểm của dây CD. Chứng minh 5 điểm S, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn
- Nếu  $SA = AO$  thì SAOB là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh rằng:  $AC \cdot BD = BC \cdot DA = \frac{AB \cdot CD}{2}$

Giải:

- Gọi I là trung điểm của OS.

Theo tính chất tiếp tuyến, ta có :

$$\angle SAB = \angle SBA = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  A, B cùng thuộc đường tròn tâm I, đường kính OS

(1)

Theo tính chất đường kính và dây cung, ta có :

$$OE \perp CD \text{ hay } \angle OES = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  E thuộc đường tròn tâm I, đường kính OS (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm S, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn tâm I, đường kính OS.

- Ta có  $OA = OB$  (bán kính của (O)),  $SA = SB$  (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó, nếu  $SA = OA$  thì  $SA = SB = OA = OB \Rightarrow$  SAOB là hình thoi.

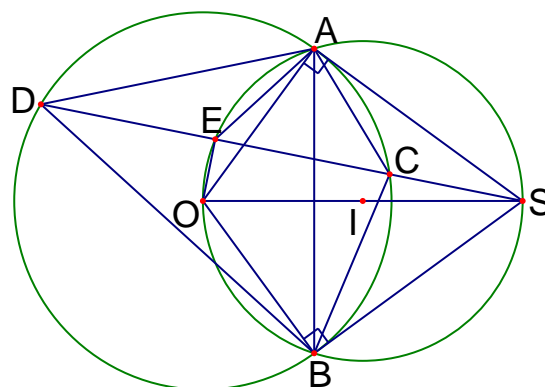
Mà  $\angle SAB = \angle SBA = 90^\circ \Rightarrow$  SAOB là hình vuông.

Vậy nếu  $SA = OA$  thì SAOB là hình vuông.

- Xét đường tròn (I) :  $\angle BAE = \angle BSE$  (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn EOB)

Xét đường tròn (O) :

$$\angle BSE = \angle BSD = \frac{1}{2}(\text{sđ } BD - \text{sđ } BC) \text{ (BSD là góc có đỉnh ở ngoài đường tròn (O)).}$$



$$\text{Mà } \angle BAC = \frac{1}{2} \text{ số đo } \angle BCD; \angle BAD = \frac{1}{2} \text{ số đo } \angle BCD$$

$$\Rightarrow \angle BSE = \angle BSD = \angle BAD - \angle BAC \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } \angle CAE = \angle BAE + \angle BAC = \angle BAD - \angle BAC + \angle BAC \text{ hay } \angle CAE = \angle BAD$$

Xét  $\triangle ACE$  và  $\triangle ABD$  có :

$$\angle CAE = \angle BAD \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle ACE = \angle ABD \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)}.$$

$$\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ABD \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} \Rightarrow AB \cdot CE = AC \cdot BD \quad (1)$$

Xét  $\triangle AED$  và  $\triangle ACB$  có :

$$\angle DAE = \angle BAC (= \angle BAD - \angle BAE = \angle CAE - \angle BAE)$$

$$\angle ADE = \angle ABC \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)}.$$

$$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AB \cdot DE = AD \cdot BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AB \cdot (CF + DE) = AC \cdot BD + AD \cdot BC \text{ hay } AB \cdot CD = AC \cdot BD + AD \cdot BC \quad (3)$$

Xét  $\triangle SAC$  và  $\triangle SDA$  có :

$$\angle ASD \text{ chung.}$$

$$\angle SDA = \angle SAC \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung cùng chắn cung AC)}.$$

$$\Rightarrow \Delta SAC \sim \Delta SDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SA}{SD} = \frac{AC}{AD} \quad (4)$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta cũng có } \Delta SBC \sim \Delta SDB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SB}{SD} = \frac{BC}{BD} \quad (5)$$

Vì  $SA = SB$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), nên từ (4) và (5) suy ra :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow AC \cdot BD = AD \cdot BC \quad (6)$$

$$\text{Từ (3) và (6) suy ra } AC \cdot BD = BC \cdot DA = \frac{AB \cdot CD}{2} \text{ (đpcm).}$$

**Bài 46:** Cho  $\Delta ABC$  vuông ở  $A$ . Nửa đường tròn đường kính  $AB$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Trên cung  $AD$  lấy một điểm  $E$ . Nối  $BE$  và kéo dài cắt  $AC$  tại  $F$ .

1. Chứng minh:  $CDEF$  là một tứ giác nội tiếp.
2. Kéo dài  $DE$  cắt  $AC$  ở  $K$ . Tia phân giác của góc  $CKD$  cắt  $EF$  và  $CD$  tại  $M$  và  $N$ . Tia phân giác của góc  $CBF$  cắt  $DE$  và  $CF$  tại  $P$  và  $Q$ . Tứ giác  $MPNQ$  là hình gì? Tại sao?
3. Gọi  $r, r_1, r_2$  là theo thứ tự là bán kính của đường tròn nội tiếp các tam giác  $ABC, ADB, ADC$ . Chứng minh rằng  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

Giải:

1. (H. 1)

Vì  $\angle ADB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên

$AD \perp BC$ . Suy ra  $\angle BAD = \angle ACB$  (cùng phụ với  $\angle ABD$ )

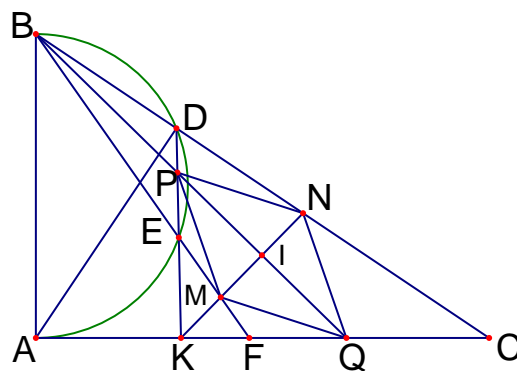
hay  $\angle BAD = \angle DCF$

Mà  $\angle BAD = \angle BED$  (góc nội tiếp cùng chắn  $BD$ ) Suy ra  $\angle DCF = \angle BED$ .

Xét tứ giác  $CDEF$  có

$$\angle DCF + \angle DEF = \angle BED + \angle DEF = 180^\circ \text{ (BED, DEF là 2 góc kề bù)}$$

$\Rightarrow$  tứ giác  $CDEF$  nội tiếp.



Hình 1

2. DEF là góc ngoài của  $\triangle BEP$  nên :  $\angle DEF = \angle PBE + \angle BPE$

$\angle BPE$  là góc ngoài của  $\triangle PKI$  nên :  $\angle BPE = \angle PIK + \angle PKI$

$$\Rightarrow \angle DEF = \angle PBE + \angle PIK + \angle PKI \quad (1)$$

$\angle BQK$  là góc ngoài của  $\triangle BQC$  nên :  $\angle DCF = \angle IQK - \angle QBC$

$\angle PIK$  là góc ngoài của  $\triangle IKQ$  nên :  $\angle IQK = \angle PIK - \angle QKI$

$$\Rightarrow \angle DCF = \angle PIK - \angle QKI - \angle QBC \quad (2)$$

Mà  $\angle PBE = \angle QBC$  (BQ là tia phân giác của  $\angle CBF$ )

và  $\angle PKI = \angle QKI$  (BN là tia phân giác của  $\angle CKD$ )

nên từ (1) và (2) suy ra  $\angle DEF + \angle DCF = \angle PIK - \angle QKI - \angle QBC + \angle PBE + \angle PIK + \angle PKI = 2\angle PIK$

hay  $180^\circ = 2\angle PIK \Rightarrow \angle PIK = 180^\circ : 2 = 90^\circ \Rightarrow BI \perp MN, KI \perp PQ, MN \perp PQ$ .

$\triangle AMN$  có BI vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân tại B

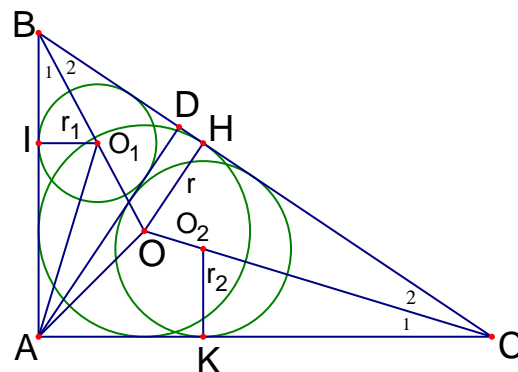
$\Rightarrow$  BI đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh MN  $\Rightarrow IM = IN$ .

Tứ giác MPNQ có  $IM = IN, IP = IQ$  nên là hình bình hành.

Lại có  $MN \perp PQ$  nên MPNQ là hình thoi.

3. (H. 2)

Gọi O,  $O_1$  và  $O_2$  theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABC$  và  $\triangle ACD$ .



Hình 2

Suy ra  $AO_1$  là tia phân giác của  $\angle BAD$  và  $CO$  là tia phân giác của  $\angle ACB$ ,  $BO_1$  là tia phân giác của  $\angle ABC$ .

$$\Rightarrow \angle BAO_1 = \frac{\angle BAD}{2} \text{ và } \angle C_2 = \frac{\angle ACB}{2}$$

Mà  $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$  (cùng phụ với  $\widehat{CAD}$ ) nên  $\widehat{BAO_1} = \widehat{C_2}$

Gọi H là tiếp điểm của BC với (O), I là tiếp điểm của AB với ( $O_1$ ), K là tiếp điểm của AC với ( $O_2$ ) thì  $OH = r$ ,  $O_1I = r_1$ ,  $O_2K = r_2$  và  $OH \perp BC$ ,  $IO_1 \perp AB$ ,  $IO_2 \perp AC$ .

Xét  $\triangle BO_1A$  và  $\triangle BOC$  có :

$B_1 = B_2$  (vì  $BO_1$  là tia phân giác của  $\angle ABC$ )

$\widehat{BAO_1} = \widehat{C_2}$  (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle BO_1A \sim \triangle BOC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{O_1I}{OH} = \frac{AB}{BC} \text{ hay } \frac{r_1}{r} = \frac{AB}{BC}$$

Chứng minh tương tự, ta có  $\frac{r_2}{r} = \frac{AC}{BC}$

$$\text{Suy ra } \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \text{ (do } AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (đ.l Pitago))}$$

$$\Rightarrow r^2 = r_1^2 + r_2^2 \text{ (đpcm).}$$

#### Bài 47:

Cho  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Hạ các đường cao AD, BE của tam giác. Các tia AD, BE lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là M, N.

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, E, D, B nằm trên một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.
2. Chứng minh rằng:  $MN \parallel DE$
3. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên cung lớn AB. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CDE$  không đổi.

Giải:

1. (H. 2)

Vì  $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$  nên E, D cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

Do đó bốn điểm A, E, D, B nằm trên một đường tròn đường kính AB.

Tâm I của đường tròn chính là trung điểm của AB.



2. Xét đường tròn tâm I :

$$\widehat{ADE} = \widehat{ABE} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)}$$

Xét đường tròn tâm O :

$$\widehat{AMN} = \widehat{ABN} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)}$$

$$\text{hay } \widehat{AMN} = \widehat{ABE} \text{ (vì } E \in BN \text{)}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \widehat{ADE} = \widehat{AMN}.$$

Hai góc này ở vị trí đồng vị bằng nhau nên  $DE \parallel MN$  (đpcm).

3. Gọi H là trực tâm của  $\triangle ABC \Rightarrow BH \perp AC$  và  $CH \perp AB$  (1)

Kẻ đường kính AK thì  $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$$\text{Hay } KB \perp AB \text{ và } KC \perp AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $BH \parallel KC$  và  $CH \parallel KB \Rightarrow BHCK$  là hình bình hành.

Do đó  $CH = BK$ .

$\triangle ABK$  vuông tại B nên theo định lý Pitago :

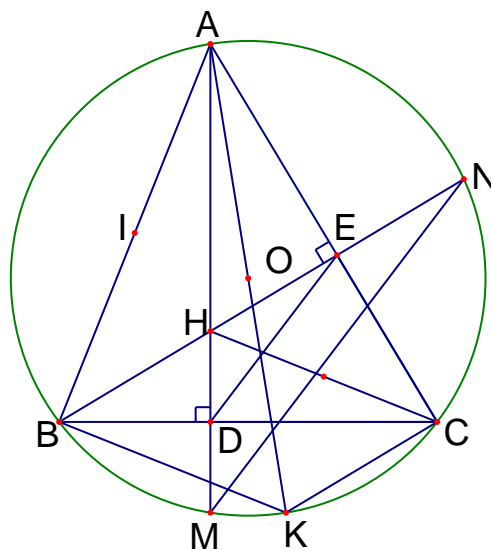
$$BK^2 = AK^2 - AB^2 = 4R^2 - AB^2 \text{ (với R là bán kính của (O))}.$$

$$\Rightarrow CH = BK = \sqrt{4R^2 - AB^2} \text{ (R > AB/2 vì AK > AB)}$$

Xét tứ giác CDHE có  $\widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90^\circ$  nên E, D cùng thuộc đường tròn đường kính CH. Nói cách khác, đường tròn đường kính CH ngoại tiếp  $\triangle CDE$ . Bán kính của đường tròn này bằng

$$\frac{CH}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} \text{ không đổi.}$$

Vậy khi điểm C di chuyển trên cung lớn AB thì độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CDE$  không đổi.



Hình 2

**Bài 48:**

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm D trên cung AB (D khác A và B), lấy điểm C nằm giữa O và B. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa D kẻ các tia Ax và By vuông góc với AB. Đường thẳng qua D vuông góc với DC cắt Ax và By lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh :  $\angle DFC = \angle DBC$
2. Chứng minh :  $\triangle ECF$  vuông
3. Giả sử EC cắt AD tại M, BD cắt CF tại N. Chứng minh :  $MN \parallel AB$
4. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp  $\triangle EMD$  và đường tròn ngoại tiếp  $\triangle DNF$  tiếp xúc nhau tại D.

Giải:

1. Xét tứ giác BCDF có :

$$\angle CDF + \angle CBD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

nên tứ giác BCDF là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \angle DFC = \angle DBC \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{CD} \text{)}$$

2. Chứng minh tương tự như trên, ta có :

$$\angle DEC = \angle DAC$$

$\triangle ADB$  có  $\angle ADB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  
nên là tam giác vuông tại D

$$\Rightarrow \angle DAC + \angle DBC = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC + \angle DFC = 90^\circ$$

Do đó  $\triangle ECF$  vuông tại C (đpcm).

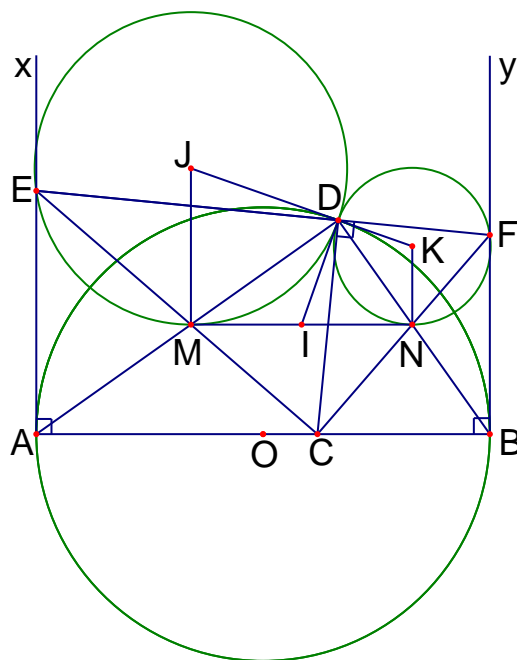
3. Tứ giác BCDF nội tiếp nên :  $\angle DBC = \angle DFC$  (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Tứ giác CMDN có  $\angle MCN + \angle MDN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  nên nội tiếp được đường tròn.

$$\Rightarrow \angle DNM = \angle DCM \text{ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MD).}$$

$\triangle ECF$  vuông tại C,  $\triangle CDF$  vuông tại D nên :

$$\angle DCM = \angle DFC \text{ (3) (cùng phụ với } \angle DCF \text{)}$$



Từ (1), (2) và (3) suy ra  $\angle DBC = \angle DNM$

Hai góc này ở vị trí đồng vị bằng nhau nên  $MN \parallel AB$  (đpcm)

4. Gọi I là trung điểm của MN, J và K theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác EMD và DNF.

$\triangle MDN$  vuông tại D nên  $IM = IN = ID$ .

Tứ giác ACDE có  $\angle CAE + \angle CDE = 180^\circ$  nên nội tiếp được đường tròn.

$\Rightarrow \angle DAC = \angle DEC$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Mặt khác:  $\angle DMN = \angle DAC$  (đồng vị,  $MN \parallel AB$ )

Suy ra  $\angle DMN = \angle DEC$  hay  $\angle DMN = \angle DEM$  (vì  $M \in EC$ )

Xét đường tròn tâm J:  $\angle DMN = \angle DEM = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DM}$

$\Rightarrow MN$  là tiếp tuyến tại M của đường tròn (J)  $\Rightarrow JM \perp MN$  hay  $\angle JMI = 90^\circ$

Xét  $\triangle IMJ$  và  $\triangle IDJ$  có :

$IM = ID$  (chứng minh trên)

$JM = JD$  (bán kính của đường tròn (J))

IJ là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle IMJ = \triangle IDJ$  (c.c.c)  $\Rightarrow \angle IDJ = \angle IMJ = 90^\circ$

Chứng minh tương tự, ta có  $\angle IDK = \angle INK = 90^\circ$

Suy ra  $\angle JDK = \angle IDJ + \angle IDK = 180^\circ$

$\Rightarrow J, D, K$  thẳng hàng và D nằm giữa J và K  $\Rightarrow JK = JD + DK$ .

Do đó hai đường tròn (J) và (K) tiếp xúc với nhau tại D  $\Rightarrow$  đpcm.

**Bài 49:**

Cho nửa đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$ . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By ở C, D.

1. Chứng minh:

a)  $CD = AC + BD$  ;

b)  $AC \cdot BD = R^2$

2. Xác định vị trí điểm M để tứ giác ABDC có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho  $R = 2$  cm, diện tích tứ giác ABDC bằng  $32\text{cm}^2$ . Tính diện tích  $\triangle ABM$

Giải:

1. (Hình vẽ)

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, thì :

$$AC = MC, BD = MD$$

$$\Rightarrow AC + BD = MC + MD = CD.$$

$$\text{Vậy } CD = AC + BD.$$

b) Cũng theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có :

OC là tia phân giác của  $\angle MOA$  ; OD là tia phân giác của  $\angle MOB$

Mà  $\angle MOA$  và  $\angle MOB$  là hai góc kề bù nên  $OC \perp OD \Rightarrow \triangle COD$  vuông tại O.

Xét  $\triangle COD$  vuông tại O có đường cao OM nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông :  $OC \cdot MD = OM^2$  hay  $AC \cdot BD = R^2$  (đpcm).

2. Tứ giác ABDC có  $AC \parallel BD$  (cùng  $\perp AB$ ) và  $\angle A = \angle B = 90^\circ$  nên là hình thang vuông.

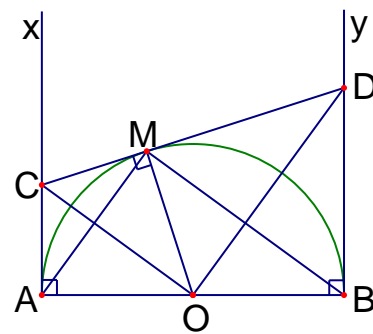
$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{(AC + BD) \cdot AB}{2} = \frac{(AC + BD) \cdot 2R}{2} = (AC + BD) \cdot R$$

$$\Rightarrow S_{ABDC} \text{ min} \Leftrightarrow AC + BD \text{ min}$$

$$\text{Do tích } AC \cdot BD = R^2 \text{ không đổi nên tổng } AC + BD \text{ min} \Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow MC = MD$$

$$\Leftrightarrow M \text{ nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính } AB.$$

Vậy điểm M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB thì diện tích tứ giác ABDC sẽ nhỏ nhất.



3. Ta có :  $S_{ABDC} = (AC + BD).R$  hay  $32 = (AC + BD).2 \Rightarrow CD = AC + BD = 16$  (cm).

Tứ giác OACM có  $\angle OMC + \angle OAC = 180^\circ$  nên nội tiếp được đường tròn.

$\Rightarrow \angle OAM = \angle OCM$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OM)

Xét  $\triangle AMB$  và  $\triangle COD$  có :  $\angle AMB = \angle COD = 90^\circ$ ,  $\angle OAM = \angle OCM$  (chứng minh trên)

$$\text{nên } \triangle AMB \sim \triangle COD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle COD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{4}{16}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$$\text{mà } S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} OM \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 = 16 \text{ (cm}^2\text{)} \Rightarrow S_{\triangle AMB} = \frac{1}{16} S_{\triangle COD} = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy  $S_{\triangle AMB} = 1 \text{ (cm}^2\text{)}.$

### Bài 50:

Cho đường tròn tâm O, đường kính  $AB = 2R$ . Gọi I là trung điểm của AO. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB.

1. Chứng minh:

a) Tứ giác ACOD là hình thoi.

b)  $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle CAD$ .

2. Chứng minh rằng O là trực tâm của  $\triangle ABCD$ .

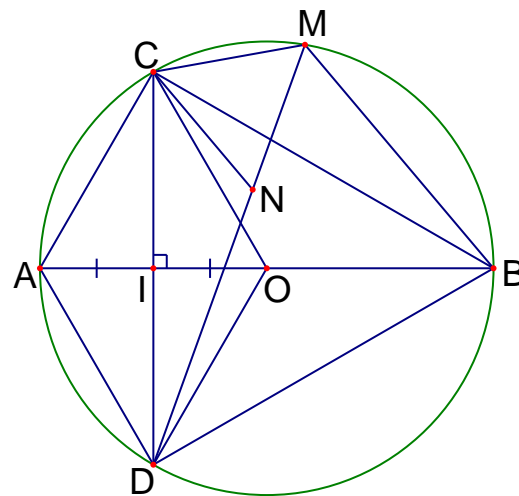
3. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tổng  $(MB + MC + MD)$  đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

1. a) Theo tính chất đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm, ta có  $IC = ID$ .

Tứ giác ACOD có hai đường chéo OA và AC vuông góc với nhau và đi qua trung điểm của mỗi đường nên là hình thoi

b) Hai góc  $\angle COD$  (góc ở tâm) và  $\angle CBD$  (góc nội tiếp) cùng chắn  $\angle CAD$  nên :  $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ .



Hình 2

Nhưng  $\angle COD = \angle CAD$  (hai góc đối của hình thoi ACOD).

$$\text{Do đó } \angle CBD = \frac{1}{2} \angle CAD.$$

2. Theo giả thiết  $BI \perp CD \Rightarrow BI$  là một đường cao của  $\triangle BCD$  (1)

Lại có  $DO \parallel AC$  (do ACOD là hình thoi),  $AC \perp BC$  (vì  $\angle ACB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)) nên  $DO \perp BC \Rightarrow DO$  là đường cao thứ hai của  $\triangle BCD$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra giao điểm O của BI và DO chính là trực tâm của  $\triangle BCD$ .

3. Vì BI là đường trung trực của CD (gt) nên  $\triangle BCD$  cân tại B.

$\triangle ACO$  có  $OA = OC$  (bán kính của (O)) và  $AC = OC$  (cạnh của hình thoi ACOD) nên  $OA = OC = AC$ . Do đó  $\triangle ACO$  là tam giác đều

$$\Rightarrow \angle COA = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD = 60^\circ$$

$\triangle BCD$  cân có  $\angle CBD = 60^\circ$  nên là tam giác đều. Suy ra  $BC = CD$  và  $\angle CDB = 60^\circ$

Xét  $\triangle CMD$  có  $\angle MCD = \frac{1}{2} \angle MBD$ ,  $\angle MDC = \frac{1}{2} \angle MC$ . Dễ thấy  $\angle MBD > \angle MC$  nên

$$\angle MCD > \angle MDC \Rightarrow MC < MD.$$

Trên đoạn CD lấy điểm N sao cho  $MC = MN$ .

Tam giác AMN cân tại M có  $\angle CMN = \angle CBD = 60^\circ$  (góc nội tiếp cùng chắn CAD) nên là tam giác đều. Suy ra  $CM = CN$  và  $\angle MCN = 60^\circ$ .

Xét  $\triangle CMB$  và  $\triangle CND$  có :

$$CD = CB, CM = CN \text{ (cmt) và } \angle DCN = \angle BCM (= \angle DCM - 60^\circ)$$

nên  $\triangle CMB = \triangle CND$  (c.g.c). Suy ra  $MB = ND$ .

$$\text{Từ đó } MB + MC + MD = ND + MN + MD = 2MD.$$

Trong đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất nên  $MD \leq 2R$

$$\Rightarrow MB + MC + MD \leq 4R.$$

Do đó tổng  $(MB + MC + MD)$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $4R$

$\Leftrightarrow MN$  là đường kính của  $(O)$ .

Mà  $DO \perp BC$  (cmt) nên  $MN \perp BC \Rightarrow MN$  là đường trung trực của  $BC \Rightarrow MB = MC \Rightarrow$

$MB = MC$  hay  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $BC$ .

Vậy để tổng  $(MB + MC + MD)$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $4R$  thì  $M$  phải là điểm chính giữa của cung nhỏ  $BC$ .

### Bài 51:

Cho  $\Delta ABC$  có 3 góc nhọn  $AC > BC$  nội tiếp  $(O)$ . Vẽ các tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $A$  và  $B$ , các tiếp tuyến này cắt nhau tại  $M$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $MC$ .

- Chứng minh rằng :
  - $MAOH$  là tứ giác nội tiếp ;
  - Tia  $HM$  là phân giác của góc  $AHB$  ;
- Qua  $C$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $MA, MB$  lần lượt tại  $E, F$ . Nối  $EH$  cắt  $AC$  tại  $P$ ,  $HF$  cắt  $BC$  tại  $Q$ . Chứng minh rằng  $QP \parallel OF$ .

Giải:

- Xem hình bên

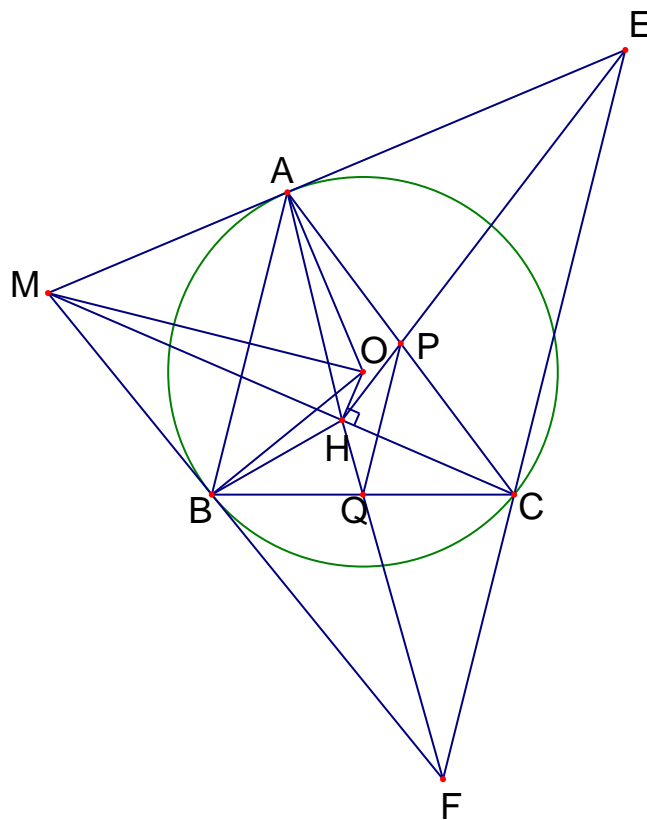
a)  $MA$  là tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $A$  nên  $OA \perp MA$  hay  $\angle MAO = 90^\circ$ .

$H$  là hình chiếu của  $O$  trên  $MC$  nên  $OH \perp MC$  hay  $\angle MHO = 90^\circ$ .

Tứ giác  $MAOH$  có  $\angle MAO + \angle MHO = 180^\circ$  nên là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tương tự như trên ta có  $\angle MBO = 90^\circ$ .

Ta có  $\angle MAO = \angle MHO = \angle MBO = 90^\circ$  nên 5 điểm  $M, A, O, H, B$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $MO$ .



Suy ra  $\widehat{AHM} = \widehat{ABM}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM) và  $\widehat{BHM} = \widehat{BAM}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM).

Xét đường tròn (O):

$\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$  (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cung).

Do đó  $\widehat{AHM} = \widehat{BHM}$  hay HM là tia phân giác của góc AHB.

2. Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt MA, MB lần lượt tại E, F. Nối EH cắt AC tại P, HF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng  $PQ \parallel EF$ .

### Bài 52:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại F, E. Gọi H là giao điểm của BE với CF, D là giao điểm của AH với BC.

1. Chứng minh :

- Các tứ giác AEHF, AEDB nội tiếp đường tròn ;
- $AF \cdot AB = AE \cdot AC$

2. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng, nếu  $AD + BE + CF = 9r$  thì tam giác ABC đều.

Giải:

1. (H. 2)

- Vì E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên :

$$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$$

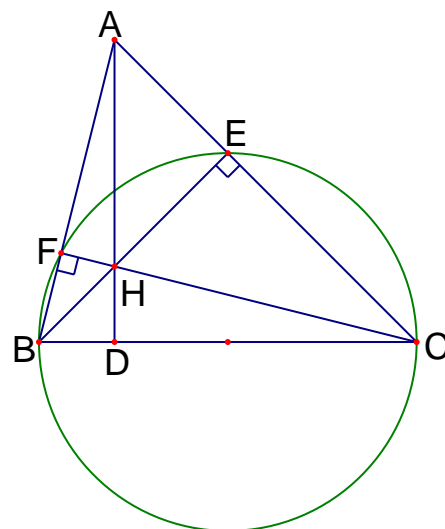
$$\Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  Tứ giác AEHF nội tiếp.

Mặt khác, do  $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$  nên BE và CF là hai đường cao của tam giác ABC. Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC. Do đó AD là đường cao còn lại của tam giác. Từ đó  $\widehat{ADB} = 90^\circ$ .

Hai điểm E và D cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AB. Hay tứ giác AEDB nội tiếp.



Hình 2



Vậy các tứ giác AEHF và AEDB cùng nội tiếp được đường tròn (đpcm).

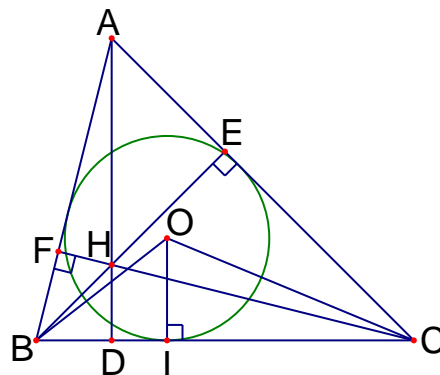
b) Các tam giác vuông AEB (vuông tại E) và AFC (vuông tại F) có  $\hat{A}$  chung nên :  
 $\triangle AEB \sim \triangle AFC$  (g.g).

$$\text{Suy ra : } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF \cdot AB = AE \cdot AC \text{ (đpcm).}$$

2. (H. 3) Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC; I là tiếp điểm của (O) và BC thì  $OI = r$  và  $OI \perp BC$ .

Hai tam giác ABC và OBC có chung cạnh BC, hai đường cao tương ứng là AD và OI nên:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{OI}{AD} = \frac{r}{AD};$$



Hình 3

Chứng minh tương tự ta có :

$$\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} = \frac{r}{BE}; \quad \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{r}{CF}.$$

$$\text{Suy ra : } \frac{r}{AD} + \frac{r}{BE} + \frac{r}{CF} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{r} \quad (1)$$

$$\text{Mà } AD + BE + CF = 9r. \text{ Suy ra } (AD + BE + CF) \left( \frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} \right) = 9r \cdot \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} + \frac{BE}{AD} + 1 + \frac{BE}{CF} + \frac{CF}{AD} + \frac{CF}{BE} + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{AD}{BE} + \frac{BE}{AD} \right) + \left( \frac{BE}{CF} + \frac{CF}{BE} \right) + \left( \frac{AD}{CF} + \frac{CF}{AD} \right) = 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có :

$$\frac{AD}{BE} + \frac{BE}{AD} \geq 2\sqrt{\frac{AD}{BE} \cdot \frac{BE}{AD}} \text{ hay } \frac{AD}{BE} + \frac{BE}{AD} \geq 2.$$

Dấu bằng có khi và chỉ khi  $\frac{AD}{BE} = \frac{BE}{AD} \Leftrightarrow AD = BE$ .

Chứng minh tương tự ta có :  $\frac{BE}{CF} + \frac{CF}{BE} \geq 2$  và  $\frac{AD}{CF} + \frac{CF}{AD} \geq 2$ .

Dấu bằng có khi và chỉ khi  $BE = CF$  và  $AD = CF$ .

Do đó :  $\left(\frac{AD}{BE} + \frac{BE}{AD}\right) + \left(\frac{BE}{CF} + \frac{CF}{BE}\right) + \left(\frac{AD}{CF} + \frac{CF}{AD}\right) \geq 6$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $AD = BE = CF \Leftrightarrow AB = BC = CA \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều.

Vậy nếu  $AD + BE + CF = 9r$  thì tam giác ABC đều

### Bài 53:

Cho hình vuông ABCD, điểm M thuộc cạnh BC (M khác B và C). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DM, đường thẳng này cắt các đường thẳng DM và DC theo thứ tự tại H và K.

1. Chứng minh các tứ giác ABHD, BHCD nội tiếp đường tròn ;
2. Tính góc CHK
3. Chứng minh:  $KH.KB = KC.KD$ ;
4. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N.

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

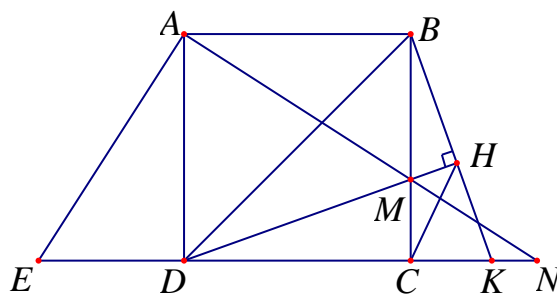
Giải:

1. Xét tứ giác ABHD có  $\angle A = 90^\circ$  (vì ABCD là hình vuông) và  $\angle BHD = 90^\circ$  (giả thiết)  
 $\Rightarrow \angle A + \angle BHD = 180^\circ$   
 Hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác ABHD nội tiếp.

Xét tứ giác BHCD có :

$\angle BCD = 90^\circ$  (vì ABCD là hình vuông) và  $\angle BHD = 90^\circ$  (giả thiết).

$\Rightarrow \angle BCD = \angle BHD = 90^\circ$ .



Hai đỉnh kề nhau H và C cùng nhìn cạnh đối diện dưới một góc bằng  $90^0$  nên tứ giác BHCD nội tiếp.

Vậy các tứ giác ABHD, BHCD nội tiếp đường tròn (đpcm).

2. Vì ABCD là hình vuông nên DB là đường phân giác của  $\angle ADC = 90^0 \Rightarrow \angle BDC = 45^0$

Tứ giác BDHC nội tiếp (chứng minh trên) nên :  $\angle CHK = \angle BDC$  (cùng bù với  $\angle BHC$ ).

Vậy  $\angle CHK = 45^0$ .

3. Xét  $\triangle KHC$  và  $\triangle KDB$  có :

$\angle K$  chung ;

$\angle CHK = \angle BDC$  (chứng minh trên)

Do đó  $\triangle KHC \sim \triangle KDB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{KH}{KC} = \frac{KD}{KB} \Rightarrow KH.KB = KC.KD$  (đpcm)

4. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho  $DE = BM$ .

Vì  $\angle ADC = 90^0 \Rightarrow \angle ADE = 90^0$  (hai góc kề bù)  $\Rightarrow \triangle ADE$  vuông tại D.

Xét  $\triangle ADE$  và  $\triangle ABM$  có :

$AD = AB$  (hai cạnh của hình vuông ABCD)

$\angle ADE = \angle ABM = 90^0$

$DE = BM$

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle ABM$  (c.g.c)  $\Rightarrow AM = AE$  và  $\angle EAD = \angle BAM$

$\Rightarrow \angle EAN = \angle EAD + \angle DAN = \angle BAM + \angle DAN = \angle BAD = 90^0 \Rightarrow \triangle EAN$  vuông tại A.

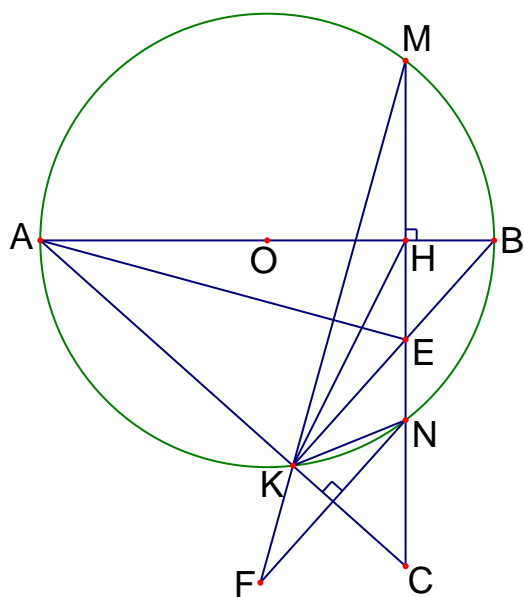
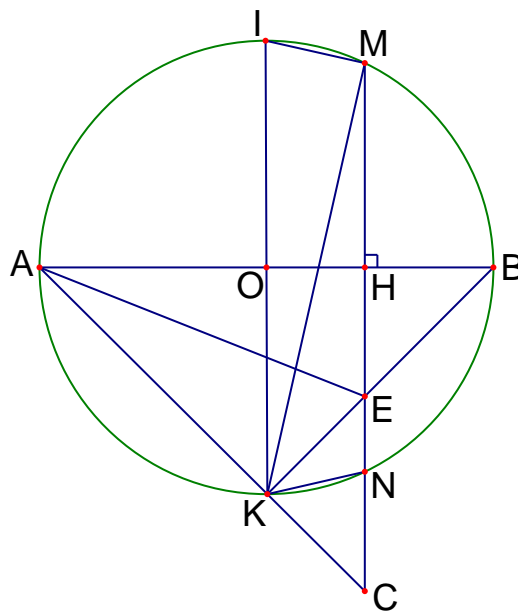
Tam giác EAN vuông tại A có đường cao AD nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} \text{ hay } \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \text{ (đpcm).}$$

**Bài 54:**

Cho đường tròn  $(O; R)$  có đường kính  $AB$  vuông góc với dây cung  $MN$  tại  $H$  ( $H$  nằm giữa  $O$  và  $B$ ). Trên tia  $MN$  lấy điểm  $C$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  sao cho đoạn thẳng  $AC$  cắt đường tròn  $(O; R)$  tại điểm  $K$  khác  $A$ , hai dây  $MN$  và  $BK$  cắt nhau ở  $E$ .

1. Chứng minh  $AHEK$  là tứ giác nội tiếp và  $\triangle CAE$  đồng dạng với  $\triangle CHK$ .
2. Qua  $N$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AC$  cắt tia  $MK$  tại  $F$ . Chứng minh  $\triangle NFK$  cân.
3. Giả sử  $KE = KC$ . Chứng minh :  $OK \parallel MN$  và  $KM^2 + KN^2 = 4R^2$ .

**Giải:****Hình 2****Hình 3**

1. (H. 2)

\*) Chứng minh  $AHEK$  là tứ giác nội tiếp :

Dễ thấy  $\angle AHE = 90^\circ$  (vì  $MN \perp AB$ )

và  $\angle AKB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay  $\angle AKE = 90^\circ$

Xét tứ giác  $AHEK$  có  $\angle AHE + \angle AKE = 180^\circ$  nên là tứ giác nội tiếp.

\*) Chứng minh  $\triangle CAE \sim \triangle CHK$

Xét  $\triangle CAE$  và  $\triangle CHK$  có :

C chung

$\angle CAE = \angle CHK$  (góc nội tiếp cùng chắn  $\overset{\frown}{KE}$  )

Do đó  $\triangle CAE \sim \triangle CHK$  (g.g)

2. (H. 2)

Vì  $BK \perp AC$  ( $\angle AKB = 90^\circ$ ) và  $NF \perp AC$  (gt) nên  $BK \parallel NF$  (cùng  $\perp AC$ ).

Do đó :  $\angle KFN = \angle MKB$  (đồng vị) và  $\angle KNF = \angle NKB$  (so le trong) (1)

Mặt khác  $\angle MKB = \frac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{MB}$  và  $\angle NKB = \frac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{NB}$

mà  $MB = NB$  (vì đường kính  $AB$  vuông góc với dây cung  $MN$ ) nên  $\angle MKB = \angle NKB$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\angle KFN = \angle KNF$ .

Vậy  $\triangle KNF$  cân tại  $K$ .

3. (H. 3)

\*) Chứng minh  $OK \parallel MN$

Nếu  $KE = KC$  thì  $\triangle KEC$  vuông cân tại  $K \Rightarrow \angle KEC = 45^\circ$ .

Tứ giác  $AHEK$  nội tiếp nên  $\angle BAK = \angle KEC = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle AKB$  vuông cân tại  $K \Rightarrow OK \perp AB$

Mà  $MN \perp AB$  (gt) nên  $OK \parallel MN$ .

\*) Chứng minh  $KM^2 + KN^2 = 4R^2$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $KO$  với  $(O ; R)$  thì  $IK \parallel MN$ .

Vì  $IK$  và  $MN$  là hai dây cung của  $(O)$  nên  $MI = NK \Rightarrow MI = KN$

$\triangle KMI$  có  $KI$  là đường kính của  $(O)$  nên vuông tại  $M$ . Áp dụng định lý Pitago, ta có :

$$KM^2 + MI^2 = KI^2 \text{ hay } KM^2 + KN^2 = 4R^2.$$

### Bài 55:

Cho đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB = 2R$ . Điểm  $C$  nằm trên tia đối của tia  $BA$  sao cho  $BC = R$ . Điểm  $D$  thuộc đường tròn tâm  $O$  sao cho  $BD = R$ . Đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $C$  cắt tia  $AD$  tại  $M$ .

- Chứng minh rằng:
  - Tứ giác  $BCMD$  là tứ giác nội tiếp.
  - $AB.AC = AD.AM$ .
  - $CD$  là tiếp tuyến của đường tròn tâm  $O$ .
- Đường tròn tâm  $O$  chia tam giác  $ABM$  thành hai phần. Tính diện tích phần tam giác  $ABM$  nằm ngoài đường tròn tâm  $O$  theo  $R$ .

### Giải:

- (Xem hình vẽ bên)

- Ta có:  $\angle ADB = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  $\Rightarrow \angle BDM = 90^\circ$  (hai góc kề bù).  
 $\angle BCM = 90^\circ$  (do  $MC \perp BC$ ).

Xét tứ giác  $BCMD$  có:  $\angle BDM + \angle BCM = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BCMD$  là tứ giác nội tiếp.

- Xét  $\triangle ADB$  và  $\triangle ACM$  có:

$$\widehat{A} \text{ chung; } \angle ADB = \angle ACM = 90^\circ$$

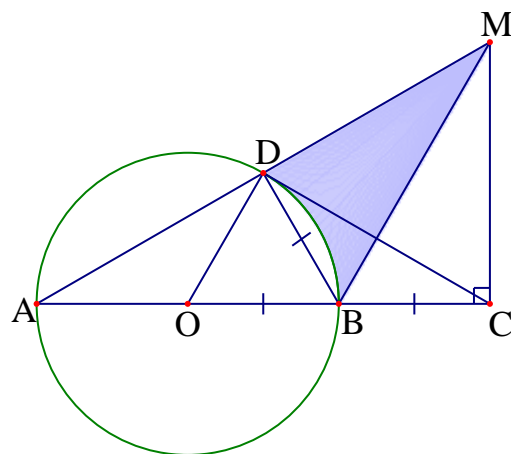
nên  $\triangle ADB \sim \triangle ACM$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AB.AC = AD.AM \text{ (đpcm).}$$

- $\triangle ODC$  có  $DB$  là đường trung tuyến ứng với cạnh  $OC$  và  $DB = \frac{1}{2}OC$  nên  $\triangle ODC$  vuông tại  $D$ .

Suy ra  $OD \perp CD$ .

Do đó  $CD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .



2.  $\triangle OBD$  có  $OB = OD = BD = R \Rightarrow \triangle OBD$  đều  $\Rightarrow \angle OBD = \angle BOD = 60^\circ$  và  $S_{\triangle OBD} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$  (đvdt)

$\triangle OAD$  và  $\triangle OBD$  chung chiều cao hạ từ đỉnh D, đáy bằng nhau nên:

$$S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBD} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}R^2}{2} \text{ (đvdt)}$$

Xét  $\triangle MBD$  và  $\triangle MBC$  có:  $\angle MDB = \angle MCB = 90^\circ$ , BM là cạnh chung,  $BD = BC$  (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle MBC$  (cạnh huyền-góc nhọn)

$$\Rightarrow \angle MBD = \angle MBC = \frac{\angle CBD}{2} = \frac{180^\circ - \angle OBD}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \angle MBD = \angle OBD \Rightarrow BD$  là tia phân giác của góc ABM.

$\triangle ABM$  có BD vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên cân tại B  $\Rightarrow BD$  đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh AM. Suy ra:  $S_{\triangle ABM} = 2S_{\triangle ABD} = \sqrt{3}R^2$  (đvdt)

Gọi S là diện tích phần tam giác ABM nằm ngoài đường tròn tâm O thì:

$$S = S_{\triangle ABM} - S_{\triangle AOD} - S_{q(OBD)} = \sqrt{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}R^2}{4} - \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} = \frac{(9\sqrt{3} - 2\pi)R^2}{12} \text{ (đvdt)}.$$

**HẾT**