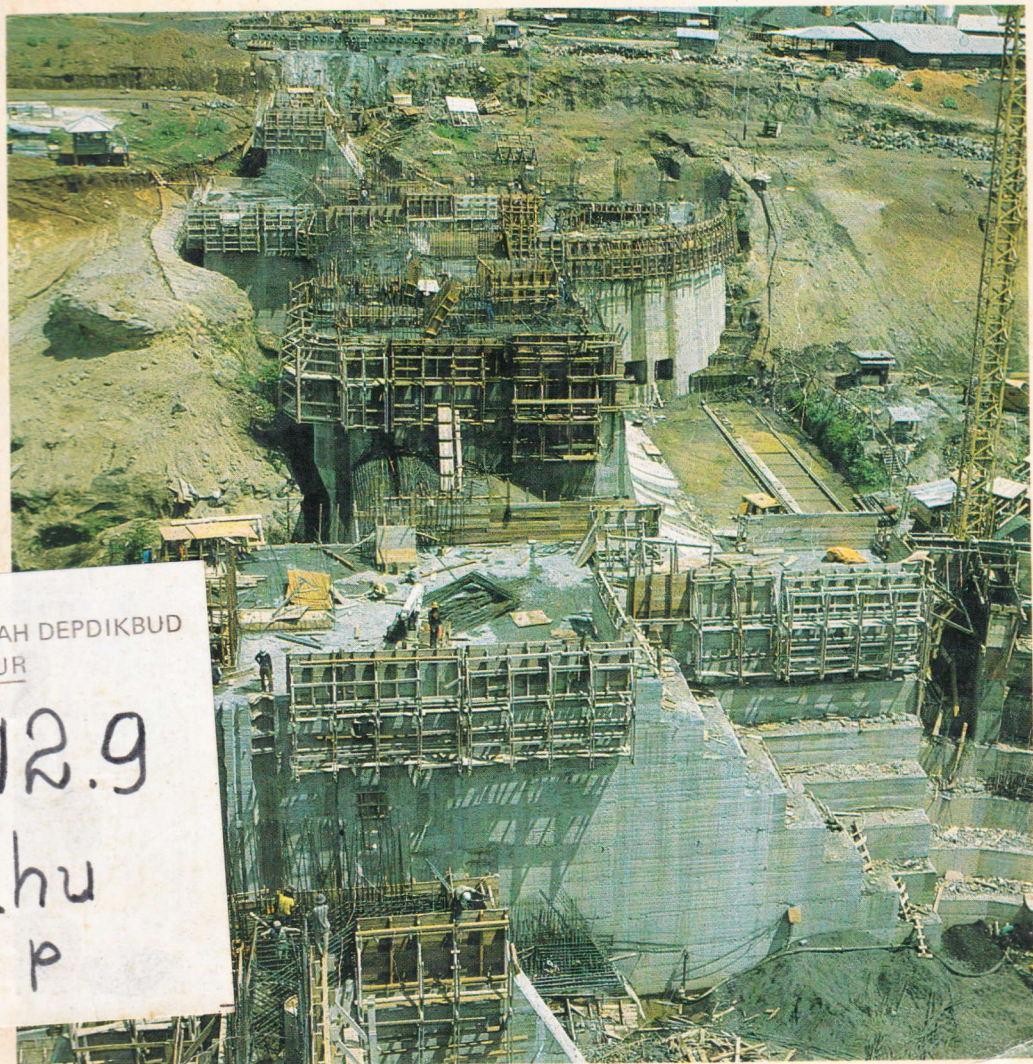


PENGANTAR ANALISIS STRUKTUR DENGAN CARA MATRIKS

Volume pertama ini mengintegrasikan dengan baik metode matriks dan metode konvensional dalam satu perlakuan secara paralel

CHU-KIA WANG

Ir. Ismoyo P.H.



VILAYAH DEPDIBUD
A TIMUR

512.9
Chu
p

Teknik Sipil dan Seri Mekanika Teknik

PENERBIT ERLANGGA

PENGANTAR ANALISIS STRUKTUR DENGAN CARA MATRIKS

Penggunaan komputer yang semakin meningkat dalam analisis dan disain struktur menuntut perlakuan yang jelas dan mendalam atas subyek metoda matriks. Volume ini dapat memenuhi kebutuhan tersebut, dengan menyajikan baik metoda maupun teknik konvensional secara paralel.

Pengantar Analisis Struktur dengan Metoda Matriks mencakup liputan analisis struktural, operasi matriks, truss statis tentu, dan statis tak tentu, balok statis tentu dan statistik-tentu, rangka tegar, teorema energi.

Disajikan pula sejumlah contoh numeris, dan sederet gambar garis yang dipergunakan untuk menurunkan berbagai metoda atau sarana menjelaskan konsep utama dan proses.

Di antaranya:

- Mengintegrasikan metoda matrik dengan metoda konvensional analisis struktur dalam keseluruhan buku.
- Menyajikan ungkapan mendasar, sederhana dan setepat mungkin untuk menurunkan dan menunjukkan metoda analisis struktur.
- Menghidangkan sejumlah contoh numeris yang dirancang untuk penuntun langkah-demi langkah para mahasiswa:

(bersambung ke lembar sampul belakang bagian dalam)

PENGANTAR ANALISIS STRUKTUR DENGAN CARA MATRIKS

AYAH CHU-KIA WANG
*Professor of Civil Engineering
The University of Wisconsin-Madison*

Diterjemahkan oleh:
Ir. Ismoyo P.H.
*Universitas Sebelas Maret
Surakarta*

1985
PENERBIT ERLANGGA
Jln. Kramat IV No. 11
Jakarta 10420
(Anggota IKAPI)

u2.827/P/Pw/86

Daftar Isi

PERPUSTAKAAN WILAYAH DEP. P DAN K
Jl. Walikota Mustajab. 68
SURABAYA

Judul Asli : **INTRODUCTORY STRUCTURAL ANALYSIS
WITH MATRIX METHODS**

Hak Cipta dalam bahasa Inggris © 1973 pada Prentice-Hall, Inc.
Hak Terjemahan dalam bahasa Indonesia pada **Penerbit Erlangga**
dengan perjanjian resmi tertanggal 19 September 1983.

Diterjemahkan oleh : **Ir. Ismoyo P.H.**
Dosen Fakultas Teknik
Universitas Sebelas Maret
Surakarta

*Dilarang keras mengutip, menjiplak atau memperbanyak seluruh atau
sebagian dari isi buku ini serta memperjual-belikannya tanpa izin
tertulis dari Penerbit Erlangga.*

Buku ini diset oleh bagian Produksi Penerbit Erlangga dengan huruf **PR-11-M**.

Setting oleh : **Samino**
Lay Out oleh : **Stephanus Pusung & Ester**
Dicetak oleh **PT Midas Surya Grafindo**

© **HAK CIPTA DILINDUNGI OLEH UNDANG-UNDANG**

Kata Pengantar

xi

1 Analisis Struktural

1

- 1.1. Struktur Kerangka dibanding Struktur Pelat
atau Kulit Kerang, 1
- 1.2. Analisis Tingkat-Pertama dan Analisis Tingkat Kedua, 2
- 1.3. Sifat-sifat Bahan Linear dan Non-Linear, 4
- 1.4. Beban Statik dibanding Beban Dinamik, 5
- 1.5. Ketidakstabilan Elastik dibanding Ketidakstabilan Statik, 7
- 1.6. Struktur Statik Tertentu dan Struktur Statik Tidak-Tentu, 8
- 1.7. Analisis Struktur dengan Cara Perpindahan, 11
- 1.8. Analisis Struktural dengan Cara Gaya, 13
- 1.9. Catatan Penutup, 14

2 Operasi Matriks

15

- 2.1. Bentuk Matriks dari suatu Sistem Persamaan Linear, 15
- 2.2. Perkalian Matriks, 17
Latihan 2.1 sampai 2.3, 19
- 2.3. Inversi Matriks, 20
- 2.4. Penyelesaian dari Persamaan Simultan Linear, 22
Latihan 2.4 dan 2.5, 25
- 2.5. Catatan Penutup, 26

3	Rangka Statik Tertentu	27
3.1.	Definisi suatu Rangka Statik Tertentu,	27
3.2.	Cara Konvensional dari Titik Simpul dan Cara Pemotongan,	30
	<i>Latihan 3.1 sampai 3.4,</i>	34
3.3.	Cara Matriks dari Titik-titik Simpul,	35
	<i>Latihan 3.5 dan 3.6,</i>	38
3.4.	Cara Grafik dari Titik-titik Simpul,	38
	<i>Latihan 3.7,</i>	41
3.5.	Lendutan (Deflection) dengan Persamaan Perpindahan Titik Simpul,	42
	<i>Latihan 3.8 dan 3.9,</i>	48
3.6.	Lendutan dengan Cara Beban-Satuan yang Konvensional,	48
	<i>Latihan 3.10,</i>	52
3.7.	Lendutan dengan Cara Beban-Satuan Matriks,	52
	<i>Latihan 3.11,</i>	54
3.8.	Catatan Penutup,	56
4	Rangka Statik Tidak-Tertentu	59
4.1.	Derajat Kebebasan,	59
4.2.	Ketidaktertentuan Eksternal dibanding Ketidaktertentuan Internal,	59
4.3.	Cara Gaya Kelebihan,	61
	<i>Latihan 4.1 dan 4.2,</i>	68–69
4.4.	Cara Perpindahan Matriks,	69
	<i>Latihan 4.3 sampai 4.5,</i>	73
4.5.	Uraian dari Matriks-matriks $[C]$ dan $[K]$,	76
	<i>Latihan 4.6,</i>	82
4.6.	Catatan Penutup,	82
5	Balok-balok Statik Tertentu	85
5.1.	Definisi dari sebuah Balok Statik Tertentu,	85
5.2.	Gaya-gaya Geser dan Momen-momen Lentur pada Balok-balok,	86
	<i>Latihan 5.1 sampai 5.3,</i>	89–90
5.3.	Hubungan Antara Beban, Gaya Geser dan Persamaan-persamaan Momen,	90
	<i>Latihan 5.4 sampai 5.6,</i>	93
5.4.	Diagram-diagram Gaya Geser dan Momen,	93
	<i>Latihan 5.7 sampai 5.9,</i>	95–96
5.5.	Kurva-kurva Elastik dari Balok-balok Statik Tertentu,	96

5.6.	Cara Luas Momen,	98
	<i>Latihan 5.10 sampai 5.12,</i>	106
5.7.	Cara Beban-Satuan,	107
	<i>Latihan 5.13 sampai 5.15,</i>	113
5.8.	Catatan Penutup,	114
6	Balok-balok Statik Tidak-Tertentu	115
6.1.	Derajat Ketidaktertentuan,	115
6.2.	Derajat Kebebasan,	116
6.3.	Cara Gaya dan Cara Perpindahan,	117
6.4.	Cara Gaya—Reaksi-reaksi Sebagai Gaya-gaya Kelebihan,	118
	<i>Latihan 6.1 sampai 6.4,</i>	122
6.5.	Cara Gaya—Persamaan Tiga Momen,	123
	<i>Latihan 6.5,</i>	127
6.6.	Cara Perpindahan—Cara Kelandaian Kelendutan,	127
	<i>Latihan 6.6 dan 6.7,</i>	134
6.7.	Matriks Statika $[A]$ dan Matriks Perubahan Bentuk $[B]$,	134
6.8.	Matriks Kekakuan Batang $[S]$,	137
6.9.	Matriks Gaya Simpul $\{P\}$,	138
6.10.	Cara Perpindahan-Matriks,	140
	<i>Latihan 6.8 dan 6.9,</i>	147
6.11.	Cara Distribusi-Momen,	147
6.12.	Pemeriksaan terhadap Distribusi Momen,	150
6.13.	Faktor Kekakuan dan Momen Ujung-Terjepit yang Dimodifikasi,	152
	<i>Latihan 6.10 dan 6.11,</i>	153–154
6.14.	Catatan Penutup,	154
7	Kerangka-kerangka Kaku	157
7.1.	Definisi-definisi dan Anggapan/Asumsi Dasar,	157
7.2.	Perputaran dan Lendutan (defleksi) dari Titik-titik Simpul pada sebuah Kerangka Kaku,	159
	<i>Latihan 7.1 dan 7.2,</i>	165
7.3.	Derajat Kebebasan dibanding Derajat Ketidaktertentuan,	166
7.4.	Cara Gaya—Reaksi-reaksi sebagai Gaya-gaya Kelebihan,	168
	<i>Latihan 7.3 sampai 7.5,</i>	177–178
7.5.	Cara Lendutan-Kelandaian dibanding Cara Perpindahan-Matriks,	178
	<i>Latihan 7.6 dan 7.7,</i>	190

7.6.	Cara Distribusi Momen, 193	
	<i>Latihan 7.8 dan 7.9, 195–198</i>	
7.7.	Catatan Penutup, 198	
8	Teorema-teorema Energi	199
8.1.	Energi-Kerja dibanding Cara-cara Geometrik-Fisik, 199	
8.2.	Prinsip Kerja Nyata, 200	
	<i>Latihan 8.1 dan 8.2, 203</i>	
8.3.	Prinsip Kerja Virtual, 203	
8.4.	Hubungan Transposisi antara Matriks Statika dan Matriks Perubahan Bentuk, 206	
8.5.	Teorema Energi Kebalikan, 209	
8.6.	Hubungan Gaya Kebalikan dibanding Hukum Lendutan Kebalikan, 212	
8.7.	Perluasan dari Sifat Bahan Nonlinear, 213	
8.8.	Energi Potensial dan Energi Potensial Pelengkap dibanding dengan Energi Regangan dan Energi Regangan Pelengkap, 214	
8.9.	Teorema Castigliano Pertama, 215	
	<i>Latihan 8.3, 219</i>	
8.10.	Teorema Kedua Castigliano, 219	
	<i>Latihan 8.4, 223</i>	
8.11.	Penurunan Cara Beban-Satuan dari Teorema Castigliano Kedua, 223	
8.12.	Teorema Kerja Terkecil, 224	
	<i>Latihan 8.5 dan 8.6, 229</i>	
8.13.	Catatan Penutup, 229	
9	Garis-garis Pengaruh dan Beban Hidup yang Bergerak	231
9.1.	Beban Tetap dan Beban Tetap yang Bergerak, 231	
9.2.	Garis-garis Pengaruh untuk Reaksi-reaksi pada Balok-balok Statik Tidak Tertentu, 231	
	<i>Latihan 9.1, 236</i>	
9.3.	Garis-garis Pengaruh untuk Gaya Geser dan Momen Lentur pada Balok-balok Statik Tidak Tertentu, 236	#
	<i>Latihan 9.2, 240</i>	
9.4.	Momen Lentur Maksimum pada sebuah Penampang dari sebuah Balok Sederhana Akibat dari sebuah Rangkaian Panjang dari Beban-beban Terpusat yang Bergerak, 241	
	<i>Latihan 9.3, 245</i>	

9.5.	Momen Lentur Maksimum Absolut dalam sebuah Balok Sederhana Akibat dari Rangkaian Panjang Beban-beban Terpusat Bergerak, 246
	<i>Latihan 9.4, 249</i>
9.6.	Garis Pengaruh untuk Reaksi-reaksi pada Balok-balok Statik Tidak-Tertentu, 249
	<i>Latihan 9.5 dan 9.6, 255</i>
9.7.	Teorema Pengaruh Muller-Breslau, 255
9.8.	Catatan Penutup, 259

Kata Pengantar

Buku teks ini telah dipersiapkan penggunaannya sebagai pelajaran pertama dalam analisis struktur, yaitu setelah pelajaran statika dan ilmu tegangan. Dengan makin meningkatnya pemakaian komputer dalam teknik struktur profesional, maka cara matriks telah dipadukan dengan cara konvensional dalam buku ini. Namun demikian karena tujuan utamanya adalah untuk memberikan pengertian tentang cara matriks, dan bukan pemakaiannya dengan menggunakan komputer, maka tidak disertakan pembahasan tentang program-program komputer.

Suatu usaha telah pula dilakukan untuk menggunakan kalimat-kalimat yang sederhana, tepat dan sesingkat mungkin dalam menguraikan dan menunjukkan berbagai cara menganalisis struktur. Pembaca disarankan untuk mempelajari dan menyerap bahan ajaran secara kritis, mantap dan berulang-ulang serta mengerjakan semua latihan dan contoh-contoh soal. Soal-soal latihan, baik yang sama maupun yang berbeda dengan contoh, diberikan untuk setiap materi pembahasan dengan maksud agar setiap soal latihan yang disarankan ini dapat dikerjakan dengan baik dan sempurna oleh setiap mahasiswa. Dalam hal ini, buku ini telah dirancang sebagai suatu buku kerja untuk studi yang berprogram. Para dosen yang berpengalaman dapat menghapus, mengganti atau menambahkan berbagai soal latihan yang lebih praktis.

Dalam Bab 8 telah dilakukan usaha yang sungguh-sungguh untuk mengembangkan dan mewujudkan pentingnya teorema energi. Karena kedua teorema dari Castigliano sangat berguna dalam penurunan matriks kekakuan dan matriks kelenturan dari elemen-elemen terbatas pada struktur pelat

dan kulit kerang, maka bab ini juga akan sangat bermanfaat pada permulaan pelajaran tentang elemen terbatas.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Nyonya Audrey M. Miller, Sekretaris Fakultas Teknik Struktur pada Universitas Wisconsin-Madison, yang telah memberikan bantuannya untuk mengetik konsep buku ini.

C. K. WANG
Madison, Wisconsin

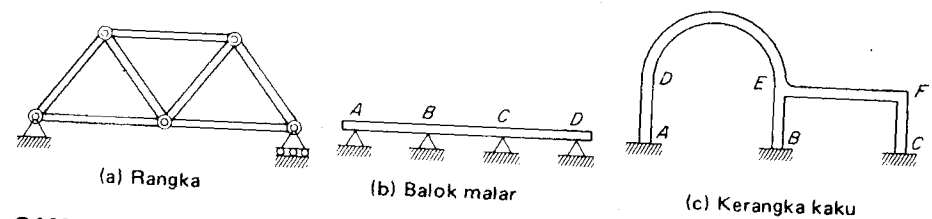
Analisis Struktural

1

1.1 Struktur Kerangka dibanding Struktur Pelat atau Kulit Kerang

Struktur bangunan dibuat untuk dapat menahan beban sepanjang umur bangunan tersebut. Struktur bangunan umum termasuk jembatan, gedung, kapal laut, pesawat terbang, mesin-mesin, dam dan bangunan-bangunan kerangka pemikul beban lainnya, dalam berbagai hal dapat dipisah-pisahkan menjadi bagian-bagian yang merupakan satu kesatuan dalam analisis dan perancangannya. Untuk suatu kesatuan struktur, dapat dibedakan lagi antara suatu *struktur kerangka* (*frame structure*) dan suatu *struktur pelat* (*plate structure*) atau *kulit kerang* (*shell structure*).

Suatu struktur kerangka terdiri dari batang-batang lurus atau lengkung yang ujung-ujungnya dihubungkan dengan memakai pasak atau dilas. Struktur kerangka yang khas adalah rangka batang,* balok dan kerangka kaku. Suatu rangkai dua-dimensi ideal seperti terlihat dalam Gambar 1.1a terdiri



GAMBAR 1.1. Struktur Kerangka yang khas.

* Rangka batang = truss; balok = beam.

dari batang-batang yang dihubungkan dengan memasukkan pasak pada ujung-ujungnya. Balok malar pada Gambar 1.1b, meskipun sesungguhnya terbuat dari satu batang panjang, dapat dianggap terdiri dari tiga batang yang dilas di *B* dan *C*. Model kerangka kaku dua-dimensi pada Gambar 1.1c dapat dibuat dengan memotong pelat baja, tetapi pada kenyataannya bisa merupakan kerangka beton bertulang monolitik atau kerangka baja yang terdiri dari lima batang yang dilas pada titik-titik simpul *D*, *E* dan *F*.

Suatu struktur pelat atau kulit kerang dibuat dari suatu pelat tipis datar atau lengkung yang malar dan biasanya disangga secara malar pada sisi-sisinya. Contoh dari jenis struktur ini antara lain adalah pelat lantai dan atap kubah dari suatu gedung, pelat geladak dan badan kapal, sayap dan rangka pesawat udara, dan lain-lain. Analisis dari bentuk struktur pelat dan kulit kerang yang beraturan biasanya masuk dalam Teori Elastisitas. Belakangan ini analisis numeris yang mendekati dari bentuk-bentuk pelat dan kulit kerang yang tidak beraturan telah pula dilakukan dengan cara elemen terbatas.

Tujuan utama dari buku ini adalah untuk memperkenalkan cara-cara menganalisis struktur-struktur kerangka; oleh karenanya buku ini diberi judul *Pengantar Analisis Struktur*.

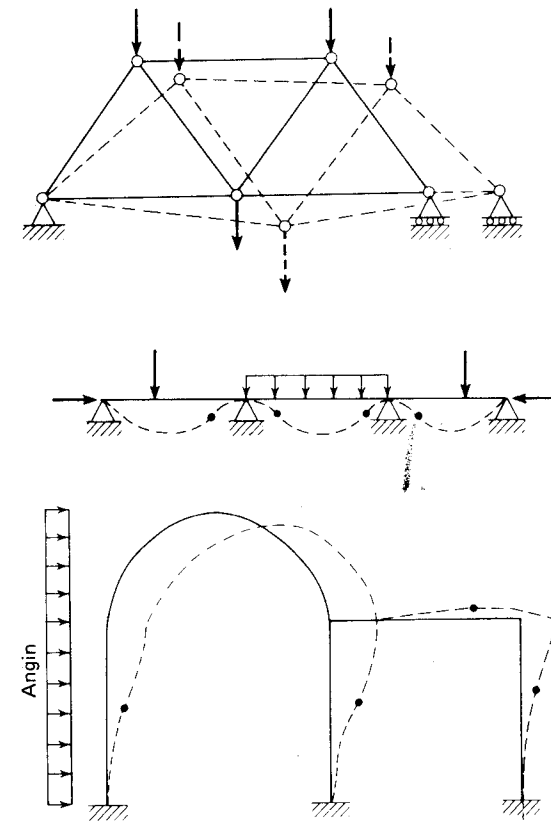
1.2 Analisis Tingkat-Pertama dan Analisis Tingkat-Kedua (First-Order Analysis and Second-Order Analysis)

Analisis dari suatu struktur kerangka, entah itu berupa rangka batang, balok ataupun kerangka kaku, akan meliputi penentuan dari

- 1) bentuk lendut dari struktur; dan
- 2) gaya aksial, dan atau gaya geser dan momen lentur pada tiap titik dalam tiap bagian konstruksi, atas dasar
 - a) bentuk struktur yang diketahui;
 - b) ukuran-ukuran dan sifat bahan dari bagian-bagian konstruksi; dan
 - c) beban yang bekerja.

Untuk memberikan gambaran tentang hal ini, bentuk-bentuk lendut dari tiga struktur tipikal diberikan dalam Gambar 1.2.

Pada rangka batang, bentuk pelendutan terjadi akibat perpindahan titik-titik simpul ke arah horizontal dan vertikal, sedangkan semua batang tetap lurus meskipun beban telah bekerja. Setiap titik simpul merupakan bagian dari sistem gaya konkuren, termasuk gaya-gaya yang bekerja pada titik-titik tersebut, dengan akibat timbulnya tegangan tarik atau tegangan tekan dalam batang-batangannya. Selanjutnya timbul pertanyaan tentang ke arah mana gaya-gaya tarik atau tekan ini bekerja. Apakah menurut arah garis tebal pada Gambar 1.2 ataukah menurut arah garis yang terputus-putus. Dalam hal yang pertama, di mana persamaan-persamaan keseimbangan didasari-



GAMBAR 1.2. Bentuk-bentuk Pelendutan dari Rangka Batang, Balok, dan Kerangka Kaku yang mungkin terjadi.

kan pada geometri dari bentuk aslinya, maka pendekatan yang dilakukan termasuk dalam *analisis tingkat pertama (first order analysis)*; tetapi dalam hal yang kedua, di mana persamaan-persamaan kesetimbangan didasarkan pada geometri yang telah berubah bentuk, secara teoretis adalah lebih tepat dan selangkah lebih maju, yang oleh karenanya disebut *analisis tingkat-kedua (second order analysis)*. Analisis tingkat-kedua merupakan suatu hal yang rumit karena geometri perubahan bentuk dan gaya-gaya aksial dalam batang saling mempengaruhi satu sama lain. Dalam kasus-kasus biasa, perubahan geometri adalah sangat kecil sehingga analisis tingkat-kedua tidak diperlukan.

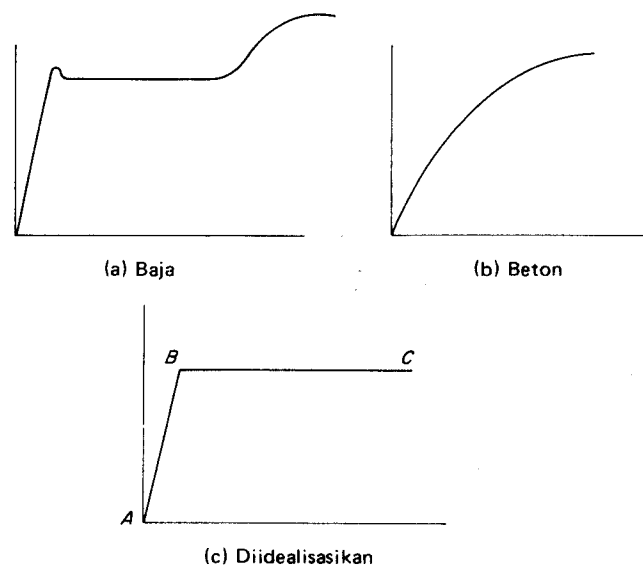
Kurva elastik untuk balok malar dalam Gambar 1.2 merupakan fungsi dari momen lentur yang terutama disebabkan oleh beban melintang di atas balok. Pada analisis tingkat-pertama, hanya momen lentur yang dianggap

menimbulkan kurva elastik, sedang pada analisis tingkat-kedua, momen lentur akibat bekerjanya gaya aksial dan lendutan dikombinasikan dengan momen lentur akibat beban melintang menimbulkan terjadinya kurva elastik. Di sini kembali momen lentur jumlah dan kurva elastik saling mempengaruhi satu sama lain.

Adalah cukup memadai apabila sampai di sini dikatakan bahwa hanya analisis tingkat-pertama yang akan dibahas dalam buku ini, yaitu bahwa persamaan-persamaan kesetimbangan didasarkan pada bentuk geometrik struktur asli yang belum mengalami perubahan bentuk.

1.3 Sifat-sifat Bahan Linear dan Non-linear

Untuk mempelajari kelakuan kerangka struktur akibat berbagai macam beban maupun terhadap gangguan lainnya diperlukan data tentang sifat-sifat bahan struktur tersebut. Sifat bahan yang paling penting adalah kurva tegangan-regangan yang didapat dari hasil percobaan di laboratorium; misalnya hasil percobaan tarik terhadap batang baja atau hasil percobaan tekan terhadap silinder beton. Kurva tegangan-regangan dari baja untuk semua maksud praktis adalah linear dalam suatu daerah yang cukup besar, sedangkan kurva tegangan-regangan dari beton berbentuk kurva dari awal sampai akhir. Sebagai tambahan, pada beton bertulang yang mengalami pengembangan retak pada daerah tarikan, maka sifat dari seluruh bagian konstruksi hanya dapat diasumsikan dengan cara statistik. Dalam Gambar 1.3c diper-



GAMBAR 1.3. Kurva Tegangan-Regangan yang khas.

lukan suatu kurva tegangan-regangan ABC yang telah diidealisasikan dan dapat dipakai sebagai dasar dalam penurunan cara matematis.

Pokok-pokok pembahasan dalam buku pengantar ini dibatasi pada kelakuan struktur menurut bagian linear garis AB pada kurva tegangan-regangan dalam Gambar 1.3c.

1.4 Beban Statik dibanding Beban Dinamik (Static & Dynamic Loads)

Jika sebuah gaya P dikerjakan secara berangsur-angsur terhadap suatu pegas elastik linear seperti terlihat dalam Gambar 1.4a, maka perpanjangan X pada setiap saat adalah berbanding lurus dengan besarnya gaya P yang bekerja dan dapat ditulis dengan rumus berikut

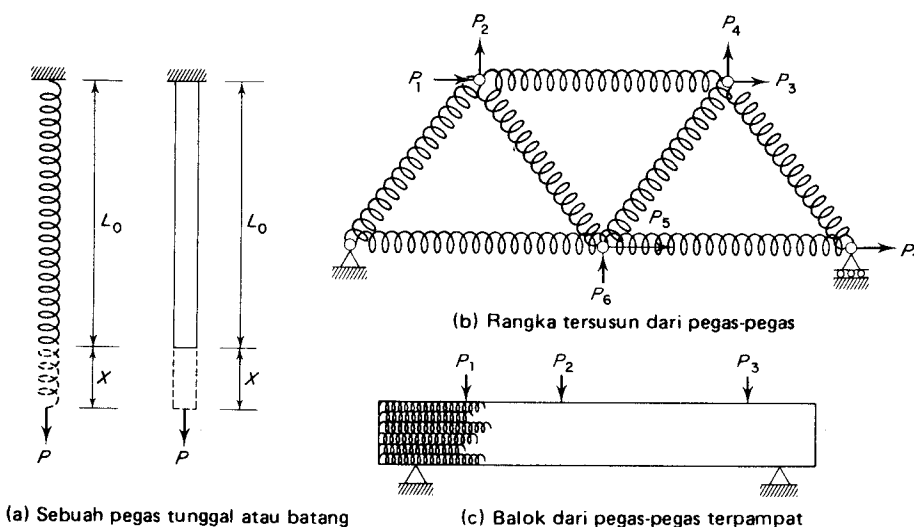
$$(1.4.1) \quad P = KX$$

di mana K adalah angka kekakuan dari pegas. Kerja yang dilakukan untuk penambahan panjang sebesar dX adalah

$$dW = PdX = KXdX$$

dan jumlah kerja yang dilakukan untuk memperpanjang pegas dari L_0 menjadi $(L_0 + X)$ adalah

$$(1.4.2) \quad W = \int dW = \int_0^X KXdX = \frac{1}{2}KX^2 = \frac{1}{2}PX$$



GAMBAR 1.4. Beban Statik pada Pegas Elastik Linear.

Jadi energi elastik yang tersimpan di dalam pegas adalah sama dengan setengah dari hasil perkalian antara besarnya gaya yang bekerja dalam pegas dengan perpanjangan pegas yang dihasilkannya.

Kelakuan dari sebuah batang pejal, selama sifat bahan tersebut menurut bagian linear garis AB dari kurva tegangan-regangan dalam Gambar 1.3c, adalah sama dengan kelakuan dari pegas elastik linear, hanya di sini harga kekakuan K adalah

$$(1.4.3) \quad K = \frac{EA}{L_0}$$

di mana E adalah modulus elastisitas dan A adalah luas penampang dari batang tersebut.

Jika gaya P yang bekerja secara berangsur-angsur diganti dengan suatu massa benda seberat W yang digantung pada ujung bawah pegas, maka akan timbul pertanyaan apakah massa benda ini dibebaskan terhadap pegas secara berangsur-angsur atau secara mendadak. Pada keadaan pertama di mana benda membebani pegas secara berangsur-angsur, maka beban ini disebut beban statik dan akan menghasilkan perpanjangan pegas, dengan menggunakan persamaan (1.4.1), sebesar

$$(1.4.4) \quad X(\text{statik}) = \frac{W}{K}$$

Dalam hal yang terakhir ini, di mana beban bekerja secara mendadak, maka beban tersebut disebut beban dinamik dan akan menghasilkan perpanjangan pada pegas yang besarnya dua kali lipat perpanjangan akibat lendutan statik dari Persamaan (1.4.4) di atas, dan setelah itu akan terjadi suatu gerakan berayun dari massa.

Rangka pada Gambar 1.4b dianggap terdiri dari tujuh buah pegas elastik linear yang dikaitkan satu sama lain pada lima buah simpul. Beban yang diberikan terdiri dari tujuh nilai gaya P . Jika beban-beban ini diterapkan secara berangsur-angsur, maka akan timbul secara berangsur-angsur pula tujuh lendutan yang tidak diketahui mulai dari nol sampai mencapai harga penuhnya; demikian juga dengan gaya-gaya dan perubahan bentuk yang terjadi dalam pegas. Bahkan balok pada Gambar 1.4c juga dapat dianggap terdiri dari sejumlah pegas-pegas kecil yang tidak terbatas yang dimampatkan, dan kelakuan balok ini akibat bekerjanya beban statik adalah sama dengan kelakuan batang tunggal atau sekelompok batang-batang.

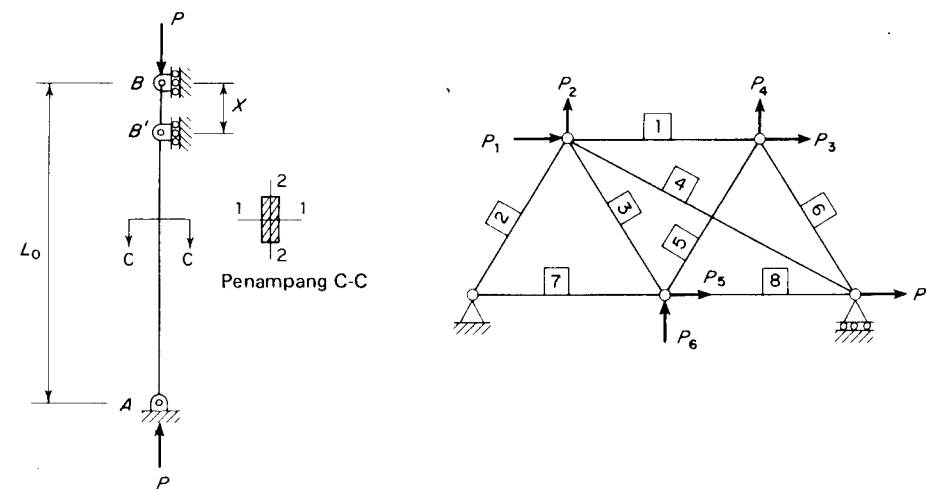
Dalam buku pengantar ini, hanya beban-beban statik—beban yang diterapkan secara berangsur-angsur—yang dipertimbangkan. Sedangkan analisis

struktural untuk beban-beban dinamik, khususnya dalam hal pegas-pegas itu sendiri mempunyai massa, lebih populer dengan nama *dinamika struktur*. Sehubungan dengan ini, maka buku ini terbatas pada *statika struktur*.

1.5 Ketidakstabilan Elastik dibanding Ketidakstabilan Statik (Elastic vs Static Instability)

Jika suatu batang dengan ujung yang satu bersendi sedang ujung yang lain disangga pada rol, seperti diperlihatkan pada Gambar 1.5, mendapat suatu gaya aksial tekan P , maka batang ini akan tetap lurus sedangkan penyangga rol akan bergeser ke bawah sebesar X yang besarnya adalah

$$(1.5.1) \quad X = \frac{P}{K} = \frac{PL_0}{AE}$$



GAMBAR 1.5. Suatu Struktur Batang Tunggal dan Suatu Rangka Batang Berganda.

Analisis struktural adalah benar selama sifat-sifat bahan adalah linear; dan juga selama P tidak mempunyai beban tekuk menurut Euler

$$(1.5.2) \quad P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_0^2}$$

di mana I adalah momen kelembaman terhadap sumbu 2-2 dari penampang batang. Seperti yang diuraikan dalam buku-buku tentang Ilmu Tegangan, beban Euler adalah beban di mana momen lentur P_{kr} dikalikan y , tepat

mengakibatkan terjadinya lendutan melintang sebesar y . Jika beban P lebih besar daripada beban Euler, maka struktur batang tunggal pada Gambar 1.5 akan menekuk dan disebut *labil secara elastis (elastically instable)*.

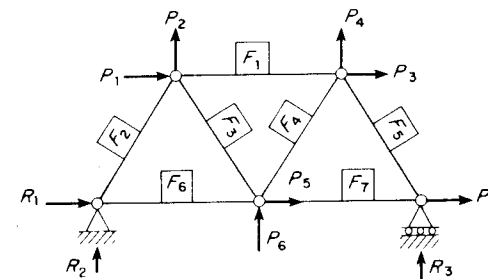
Analisis struktural dari rangka dalam Gambar 1.5b adalah meliputi penentuan lendutan-lendutan semua titik simpul dan penentuan gaya-gaya aksial pada semua batang. Dalam hal di mana gaya aksial tekan dalam salah satu batang melebihi besarnya gaya Euler menurut Persamaan (1.5.2), maka seluruh susunan tidak mempunyai arti secara fisik karena batang tadi akan tertekuk dan tidak berfungsi lagi. Dalam buku pengantar ini dianggap bahwa ketidakstabilan elastik tersebut tidak akan terjadi, dan meninggalkan dahulu analisis struktur-struktur di mana beberapa bagian konstruksi telah melampaui kapasitasnya akibat tekuk. Namun demikian, pengertian tentang ketidakstabilan elastik hendaknya jangan sampai dikacaukan dengan pengertian ketidakstabilan statik. Sebagai contoh, apabila batang nomor 2 pada rangka batang dalam Gambar 1.5b dihapuskan, maka struktur menjadi tidak mampu untuk menahan suatu sistem pembebanan yang umum—satu set sembarang tujuh buah harga P —secara keseimbangan statik dan struktur ini disebut *labil secara statis*. Struktur-struktur yang labil secara statis tidak boleh ada dan tidak terdapat cara untuk menganalisis struktur tersebut.

1.6 Struktur Statik Tertentu dan Struktur Statik Tidak-Tertentu

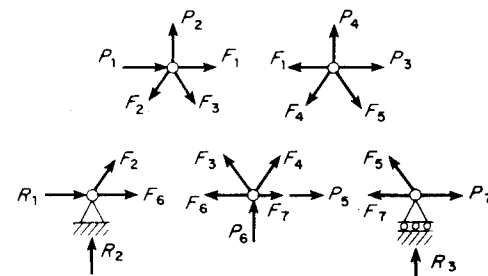
Seperti telah dinyatakan di muka, analisis struktural dari suatu rangka seperti yang terlihat dalam Gambar 1.6a adalah meliputi penentuan dari lendutan-lendutan dari semua titik simpul dan gaya aksial dalam semua batang akibat bekerjanya satu himpunan sembarang nilai-nilai P . Jika seluruh rangka dipisah-pisahkan menjadi lima bagian lepas dari simpul-simpul, seperti terlihat dalam Gambar 1.6b, maka terdapat dua persamaan kesetimbangan statik di tiap-tiap titik simpul atau seluruhnya sepuluh persyaratan. Untuk struktur rangka ini juga terdapat sepuluh buah gaya-gaya yang tidak diketahui yaitu tiga buah gaya reaksi penyangga dan tujuh buah gaya batang. Jika jumlah persyaratan statik sama dengan jumlah gaya yang tidak diketahui, maka struktur ini disebut *statik tertentu (statically determinate)* dengan syarat bahwa struktur tersebut juga stabil secara statik. Sebagai contoh, rangka dalam Gambar 1.6c, boleh jadi mempunyai sepuluh buah persyaratan statik dan sepuluh buah gaya yang tidak diketahui, tetapi struktur ini masih labil secara statik.

Rangka pada Gambar 1.6d mempunyai kelebihan satu batang dari rangka pada Gambar 1.6a; oleh karenanya, rangka ini juga hanya mempunyai sepuluh buah persyaratan statik, tetapi mempunyai sebelas buah gaya yang tidak diketahui. Jika jumlah persyaratan statik bebas yang bisa diperoleh

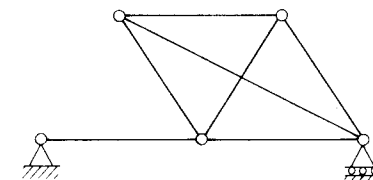
kurang dari jumlah gaya-gaya yang tidak diketahui, maka struktur tersebut disebut *statik tidak-tertentu (statically indeterminate)*. Banyaknya kekurangan persyaratan statik disebut *derajat ketidaktertentuan statik*. Derajat ketidaktertentuan dari rangka pada Gambar 1.6d adalah sama dengan satu, sedangkan untuk rangka pada Gambar 1.6e sama dengan tiga.



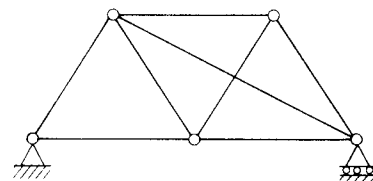
(a) Rangka statik tertentu



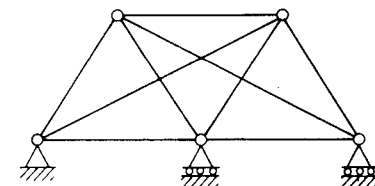
(b) Diagram bagian lepas



(c) Rangka labil

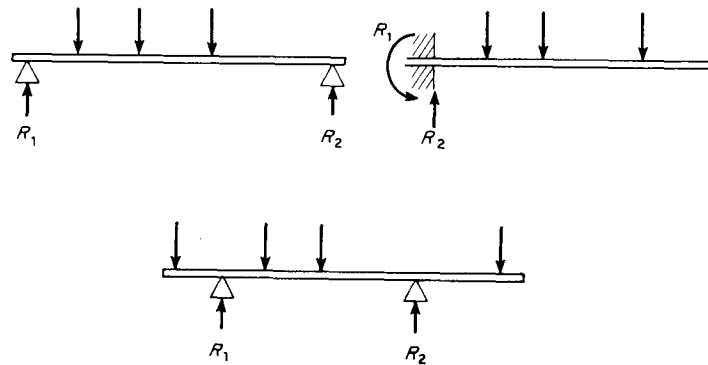


(d) Rangka statik tidak tertentu
($j = 1$)

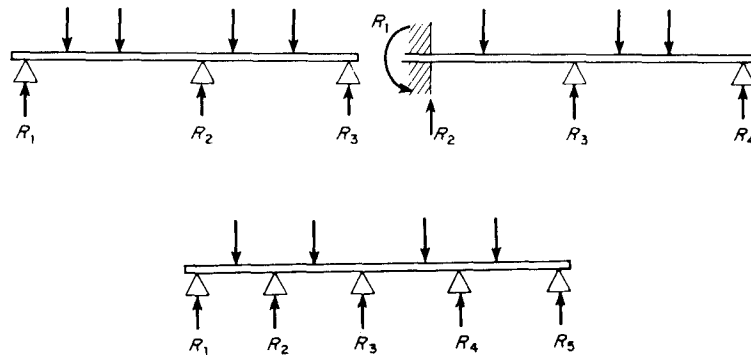


(e) Rangka statik tidak tertentu
($j = 3$)

GAMBAR 1.6. Rangka Statik Tertentu dan Tidak-Tertentu.

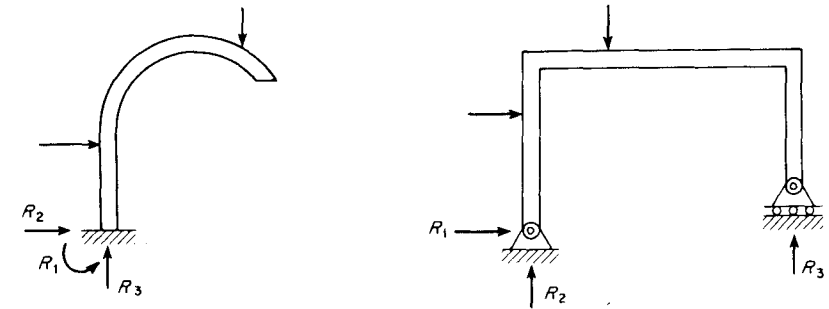


GAMBAR 1.7. Balok Statik Tertentu.

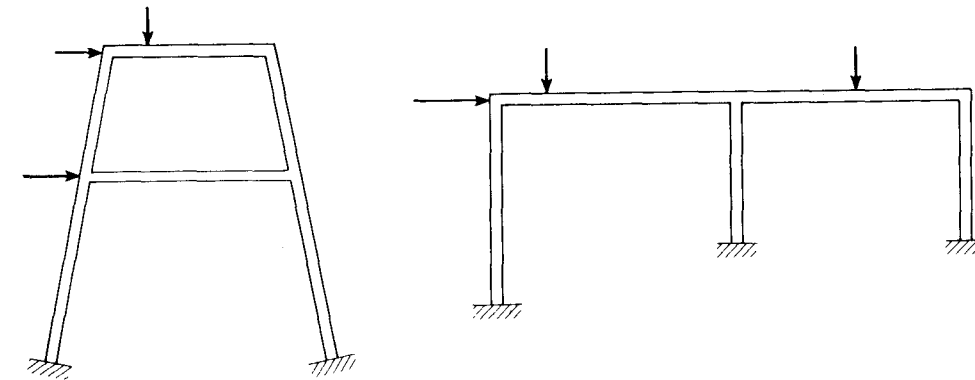


GAMBAR 1.8. Balok Statik Tidak-Tertentu.

Balok sederhana, konsol dan konsol malar seperti terlihat dalam Gambar 1.7 adalah statik tertentu, akan tetapi balok-balok malar dalam Gambar 1.8 adalah statik tidak-tertentu berturut-turut derajat satu, derajat dua dan derajat tiga. Demikian juga kerangka-kerangka kaku seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.9 adalah statik tertentu, sedangkan pada Gambar 1.10 terlihat contoh kerangka-kaku statik tidak-tertentu. Penjelasan lebih lanjut tentang derajat ketidaktertentuan statik dari kerangka-kerangka kaku akan diberikan dalam bab-bab selanjutnya.



GAMBAR 1.9. Kerangka Kaku Statik Tertentu.

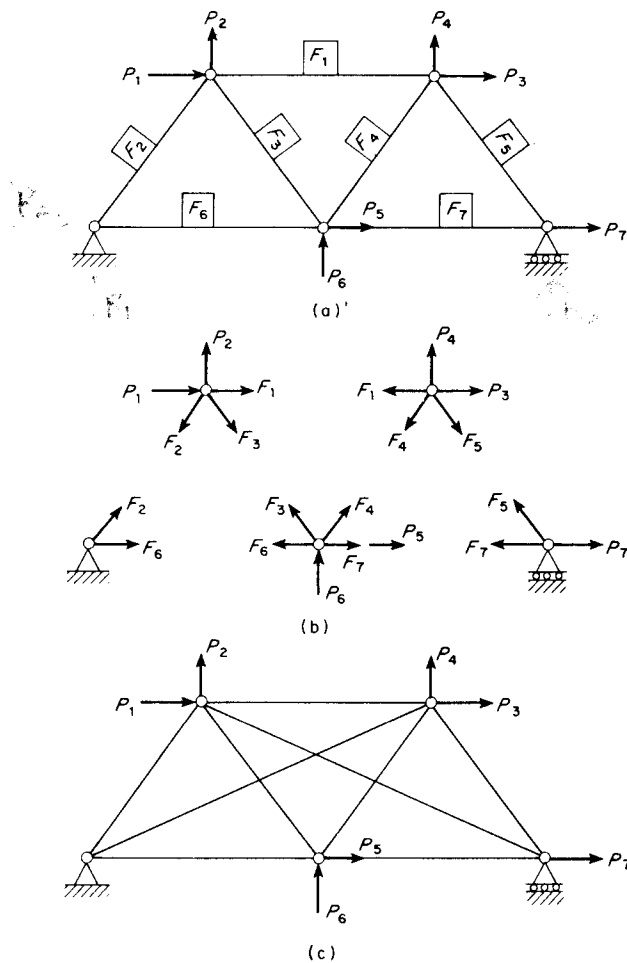


GAMBAR 1.10. Kerangka Kaku Statik Tidak-Tertentu.

1.7 Analisis Struktur dengan Cara Perpindahan

Tinjau lagi rangka statik tertentu pada Gambar 1.11a maupun rangka statik tidak-tertentu derajat kedua pada Gambar 1.11c. Pengetahuan lengkap dari perilaku salah satu rangka di bawah pembebanan tujuh buah nilai P , harus mencakup besarnya tujuh buah perpindahan titik-titik simpul dalam arah gaya-gaya P , dan besarnya gaya-gaya aksial dalam batang yaitu tujuh buah gaya batang pada rangka dalam Gambar 1.11a dan sembilan buah gaya batang pada rangka dalam Gambar 1.11c. Jika dalam menyusun penyelesaian diambil tujuh perpindahan titik-titik simpul sebagai hal-hal pokok yang tidak diketahui, maka dapat dikatakan:

- 1) bahwa perubahan panjang dari setiap batang dapat dinyatakan dengan perubahan-perubahan kedudukan dari masing-masing ujungnya;



GAMBAR 1.11. Analisis Rangka dengan Cara Perpindahan.

- 2) bahwa gaya aksial dalam setiap batang dapat dinyatakan dengan perubahan panjang batang yang bersangkutan, asalkan sifat dari bahan adalah elastik linear; dan
- 3) bahwa ketujuh buah persamaan kesetimbangan titik-titik simpul dapat dituliskan dalam ketujuh arah gaya P dengan menggunakan diagram bagian lepas seperti terlihat dalam Gambar 1.11b.

Menurut urutan langkah kerja ini, dengan mengabaikan apakah struktur adalah statik tertentu atau statik tidak-tertentu, maka akan selalu didapat persamaan-persamaan statika sebanyak jumlah perpindahan titik-titik sim-

pul yang tidak diketahui karena hanya ada satu koordinat beban setiap koordinat-perpindahan. Cara analisis struktur ini, di mana perpindahan titik simpul merupakan pokok yang tidak diketahui, disebut *cara perpindahan* (displacement method).

Konsep cara perpindahan ini sangat sederhana, tetapi dalam pemakaiannya menyangkut proses dari sejumlah transformasi-transformasi linear dan penyelesaian persamaan-persamaan simultan. Dengan bantuan aljabar matriks dan perhitungan elektronik, operasi-operasi semacam ini menjadi lebih mudah untuk diselesaikan. Meskipun analisis rangka telah dipilih untuk memberikan gambaran tentang dasar-dasar cara perpindahan, namun cara perpindahan itu sendiri dapat juga dipakai untuk menganalisis semua tipe struktur, baik statik tertentu maupun tidak-tertentu.

1.8 Analisis Struktural dengan Cara Gaya

Jumlah gaya-gaya yang tidak diketahui pada rangka statik tertentu dalam Gambar 1.11a ada sepuluh, yaitu terdiri dari tiga buah gaya reaksi dan tujuh buah gaya batang aksial; Gambar 1.11c ada duabelas, di mana jumlah persamaan statika independen tetap sepuluh buah. Kesepuluh gaya yang tidak diketahui untuk rangka statik tertentu dapat langsung diselesaikan dari kesepuluh persamaan statik, bahkan tanpa harus mengetahui ukuran dan sifat bahan dari ketujuh batang. Jadi, meskipun perubahan bentuk yang terjadi pada suatu struktur statik tertentu harus tergantung kepada sifat-sifat elastik dari unsur-unsur penyusun bagian konstruksi, namun gaya-gaya internal yang terjadi ditentukan sepenuhnya oleh bentuk asli dari struktur tersebut.

Keadaan ini akan berbeda dalam hal rangka adalah statik tidak-tertentu seperti yang terlihat pada Gambar 1.11c. Seandainya tetap dipaksakan bahwa keduabelas gaya-gaya yang tidak diketahui diambil sebagai pokok-pokok yang tidak diketahui, maka diperlukan adanya tambahan dua buah persyaratan statik lagi dari sepuluh buah persyaratan yang telah ada. Persyaratan ini adalah persyaratan kesepadanan perubahan bentuk, yang konsepsnya meliputi:

- 1) pemotongan dua buah batang rangka sedemikian rupa sehingga struktur rangka tetap menjadi statik tertentu dan tetap stabil secara statik;
- 2) penentuan besarnya ruang kesenjangan atau bagian yang tumpang tindih pada kedua pemotongan di atas akibat bekerjanya beban; dan
- 3) penentuan gaya-gaya aksial pada kedua batang yang dipotong, yang jika dikerjakan berpasangan pada kedua pemotongan dapat menghapuskan kesenjangan atau tumpang tindih tadi.

Jadi, gaya-gaya aksial yang tidak diketahui dalam batang-batang yang dipotong dapat dipandang sebagai *maha* pokok-pokok yang tidak diketahui, dan harus ditentukan terlebih dahulu dari persyaratan-persyaratan kesepadanan. Cara analisis struktural ini, di mana analisis struktur dengan *cara gaya* (*force method*). Untuk menganalisis struktur statik tidak-tertentu dengan cara gaya, diperlukan sifat-sifat elastik unsur penyusun bagian-bagian konstruksi, yaitu dalam menilai dan kemudian menghapuskan kesenjangan dan tumpang tindih pada pemotongan bagian-bagian struktur statik tidak tertentu tersebut.

Cara gaya tidak hanya dipakai untuk menganalisa struktur rangka saja, akan tetapi juga dapat dipakai untuk tipe-tipe struktur kerangka lainnya. Dalam buku pengantar ini, cara perpindahan dan cara gaya akan digarap secara sungguh-sungguh.

1.9 Catatan Penutup

Suatu usaha telah dilakukan dalam bab pertama ini untuk memberikan batasan-batasan tentang pokok bahasan dalam buku ini dan dilanjutkan dengan pembahasan secara umum dari cara-cara analisa struktur dengan cara perpindahan dan cara gaya. Batasan-batasan ini meliputi: 1) struktur kerangka dan struktur pelat atau kulit kerang; 2) analisis tingkat pertama dan analisis tingkat-kedua; 3) sifat-sifat bahan elastik linear dibanding non-linear atau tidak elastik; dan 4) beban statik dibanding beban dinamik. Sebagai tambahan, kemungkinan timbulnya ketidakstabilan elastik disertakan pula.

Cara perpindahan, dapat dipakai baik untuk struktur statik tertentu maupun statik tidak-tertentu, semakin menjadi populer karena penggunaannya yang mudah dengan komputer elektronik memakai rumus-rumus matriks. Cara gaya, atau namanya yang lebih tepat adalah cara gaya kelebihan, harus secara tepat dihubungkan untuk penganalisaan struktur-struktur statik tidak-tertentu. Cara ini merupakan suatu prosedur yang memerlukan pengetahuan dan kecakapan yang cukup, dan secara tradisional telah merupakan cara satu-satunya untuk menganalisa struktur rangka statik tidak-tertentu. Para mahasiswa yang mempelajari ilmu teori tentang struktur sebaiknya harus mengerti akan kedua cara- analisis tersebut di atas.

Operasi Matriks

2

2.1 Bentuk Matriks dari suatu Sistem Persamaan Linear

Anggaplah bahwa hubungan antara tiga harga x dan empat nilai y dapat dinyatakan dengan tiga persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 \\ x_2 &= 6y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 9y_4 \\ x_3 &= 10y_1 + 11y_2 + 12y_3 + 13y_4 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Duabelas bilangan konstan yang muncul pada Persamaan (2.1.1) dapat disusun dalam bentuk sebuah *matriks*, yaitu sebuah blok empat persegi yang terdiri dari angka-angka berikut:

$$[A]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 & +5 \\ +6 & +7 & +8 & +9 \\ +10 & +11 & +12 & +13 \end{bmatrix} \quad (2.1.2a)$$

Sebuah *matriks empat-persegi* (*rectangular matrix*) ditandai dengan huruf besar dalam tanda kurung persegi, dengan subskrip pertama dan kedua berurut-turut menunjukkan jumlah bilangan dalam baris dan jumlah bilangan dalam kolom. Begitu pula harga-harga x dan y dapat disusun dalam bentuk

sebuah *matriks kolom* (*column matrix*), yaitu matriks empat-persegi dengan hanya sebuah kolom, sebagai berikut

$$(2.1.2b) \quad \{X\}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \{Y\}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks kolom ditandai dengan huruf besar dalam tanda kurung kurawal.

Bentuk matriks dari suatu sistem persamaan linear seperti Persamaan (2.1.1) dapat dituliskan secara sederhana sebagai berikut

$$\{X\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 4} \{Y\}_{4 \times 1}$$

di mana $\{X\}$, $[A]$, dan $\{Y\}$ adalah seperti yang dinyatakan dalam Persamaan (2.1.2ab). Secara umum, bentuk matriks dari sebuah sistem persamaan linear adalah

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots a_{1j}y_j + \cdots + a_{1M}y_M \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2j}y_j + \cdots + a_{2M}y_M \\ &\vdots \\ x_i &= a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots a_{ij}y_j + \cdots + a_{iM}y_M \\ &\vdots \\ x_L &= a_{L1}y_1 + a_{L2}y_2 + \cdots a_{Lj}y_j + \cdots + a_{LM}y_M \end{aligned}$$

dapat ditulis sebagai

$$(2.1.4a) \quad \{X\}_{L \times 1} = [A]_{L \times M} \{Y\}_{M \times 1}$$

di mana

$$(2.1.4b) \quad \{X\}_{L \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} \quad [A]_{L \times M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L1} & a_{L2} & \cdots & a_{LM} \end{bmatrix} \quad \{Y\}_{M \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$$

Perlu dicatat bahwa a_{ij} adalah elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks $[A]$.

2.2 Perkalian Matriks

Jika dua buah sistem persamaan linear

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 \\ x_2 &= 6y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 9y_4 \\ x_3 &= 10y_1 + 11y_2 + 12y_3 + 13y_4 \end{aligned}$$

dan

$$(2.2.2) \quad \begin{aligned} y_1 &= 14z_1 + 15z_2 \\ y_2 &= 16z_1 + 17z_2 \\ y_3 &= 18z_1 + 19z_2 \\ y_4 &= 20z_1 + 21z_2 \end{aligned}$$

diketahui, maka dapat diturunkan sebuah sistem persamaan linear ketiga di mana ketiga nilai x langsung dinyatakan dalam kedua nilai z dengan cara mensubstitusikan Persamaan (2.2.2) ke dalam Persamaan (2.2.1), menjadi

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= 2(14z_1 + 15z_2) + 3(16z_1 + 17z_2) + 4(18z_1 + 19z_2) + 5(20z_1 + 21z_2) \\ &= 248z_1 + 262z_2 \\ x_2 &= 6(14z_1 + 15z_2) + 7(16z_1 + 17z_2) + 8(18z_1 + 19z_2) + 9(20z_1 + 21z_2) \\ &= 520z_1 + 550z_2 \\ x_3 &= 10(14z_1 + 15z_2) + 11(16z_1 + 17z_2) + 12(18z_1 + 19z_2) + 13(20z_1 + 21z_2) \\ &= 792z_1 + 838z_2 \end{aligned}$$

Persamaan (2.2.1) sampai dengan Persamaan (2.2.3) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai:

$$(2.2.4) \quad \{X\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 4} \{Y\}_{4 \times 1}$$

$$(2.2.5) \quad \{Y\}_{4 \times 1} = [B]_{4 \times 2} \{Z\}_{2 \times 1}$$

$$(2.2.6) \quad \{X\}_{3 \times 1} = [C]_{3 \times 2} \{Z\}_{2 \times 1}$$

Jika Persamaan (2.2.5) disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.2.4), maka didapat

$$(2.2.7) \quad \{X\} = [A]\{Y\} = [A][B]\{Z\}$$

Dengan membandingkan Persamaan (2.2.7) dengan Persamaan (2.2.6), maka dapat disimpulkan

$$(2.2.8) \quad [C]_{3 \times 2} = [A]_{3 \times 4}[B]_{4 \times 2}$$

Matriks $[C]$ didefinisikan sebagai hasil perkalian antara matriks $[A]$ dan $[B]$. Pada perkalian matriks $[A]$ dan $[B]$ ini, penting untuk dicatat bahwa jumlah kolom pada elemen perkalian awal $[A]$ harus sama dengan jumlah baris pada elemen perkalian akhir $[B]$.

$[A]_{3 \times 4} =$				$[B]_{4 \times 2} =$	
2	3	4	5	14	15
6	7	8	9	16	17
10	11	12	13	18	19
				20	21

$[C]_{3 \times 2} =$			
$2 \times 14 = 28$	$2 \times 15 = 30$		
$3 \times 16 = 48$	$3 \times 17 = 51$		
$4 \times 18 = 72$	$4 \times 19 = 76$		
$5 \times 20 = 100$	$5 \times 21 = 105$		
248	262		
$6 \times 14 = 84$	$6 \times 15 = 90$		
$7 \times 16 = 112$	$7 \times 17 = 119$		
$8 \times 18 = 144$	$8 \times 19 = 152$		
$9 \times 20 = 180$	$9 \times 21 = 189$		
520	550		
$10 \times 14 = 140$	$10 \times 15 = 150$		
$11 \times 16 = 176$	$11 \times 17 = 187$		
$12 \times 18 = 216$	$12 \times 19 = 228$		
$13 \times 20 = 260$	$13 \times 21 = 273$		
792	838		

Perhitungan dalam mensubstitusi Persamaan (2.2.2) ke dalam Persamaan (2.2.1) dapat disusun dalam bentuk tabel pada halaman 18, di mana c_{ij} adalah jumlah perkalian antara a_{ik} dengan b_{kj} untuk nilai k mulai dari 1 sampai dengan jumlah banyaknya kolom pada matriks $[A]$ atau jumlah banyaknya baris pada matriks $[B]$. Rumus perkalian matriks $[A]_{L \times M}$ dan $[B]_{M \times N}$ adalah

$$(2.2.9) \quad C(i, j) = \sum_{k=1}^{k=M} [A(i, k) * B(k, j)]$$

LATIHAN 2.1

Diketahui

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & +2 & -3 \\ +4 & -5 & -6 \\ +7 & -8 & +9 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} +10 & -11 \\ -12 & +13 \\ -14 & +15 \end{bmatrix}$$

hitung $[C] = [A][B]$. Hitung $\{X\}$ dari $\{X\} = [C]\{Z\}$ secara langsung apabila $z_1 = +3$ dan $z_2 = -2$; selanjutnya hitung $\{X\}$ dari $\{X\} = [A]\{Y\}$ setelah mendapatkan $\{Y\}$ dari $\{Y\} = [B]\{Z\}$ jika $z_1 = +3$ dan $z_2 = -2$.

LATIHAN 2.2

Diketahui

$$[A] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{bmatrix}$$

hitung $[AB]$.

LATIHAN 2.3

Diketahui

$$[A] = \begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

hitung $[AB]$.

2.3 Inversi Matriks (Matrix Inversion)

Anggaplah bahwa tiga buah nilai x dapat diungkapkan dalam tiga nilai y dengan tiga persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (2.3.1) \quad & x_1 = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ & x_2 = 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 \\ & x_3 = 8y_1 + 9y_2 + 6y_3 \end{aligned}$$

Bentuk matriks dari sistem persamaan (2.3.1) adalah

$$(2.3.2) \quad \{X\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 3} \{Y\}_{3 \times 1}$$

di mana

$$(2.3.3) \quad [A]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 \\ +5 & +6 & +7 \\ +8 & +9 & +6 \end{bmatrix}$$

Kecuali ada ketergantungan pada ketiga Persamaan (2.3.1), maka ketiga nilai y dapat dinyatakan dalam ketiga nilai x dengan persamaan

$$\begin{aligned} (2.3.4) \quad & y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ & y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ & y_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned}$$

Bentuk matriks dari sistem persamaan linear (2.3.4) adalah

$$(2.3.5) \quad \{Y\}_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 3} \{X\}_{3 \times 1}$$

di mana

$$(2.3.6) \quad [B]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks $[B]$ disebut sebagai inversi dari matriks $[A]$; bentuk matriks inversi secara simbolis adalah

$$(2.3.7) \quad [B] = [A]^{-1} = [A^{-1}]$$

Persamaan (2.3.5) sekarang dapat ditulis sebagai

$$(2.3.8) \quad \{Y\} = [A^{-1}]\{X\}$$

Substitusikan Persamaan (2.3.8) ke dalam Persamaan (2.3.2)

$$(2.3.9) \quad \{X\} = [A]\{Y\} = [A][A^{-1}]\{X\} = [AA^{-1}]\{X\}$$

Dalam bentuk konvensional, Persamaan (2.3.9) adalah

$$\begin{aligned} (2.3.10) \quad & x_1 = 1.0 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 \\ & x_2 = 0 x_1 + 1.0 x_2 + 0 x_3 \\ & x_3 = 0 x_1 + 0 x_2 + 1.0 x_3 \end{aligned}$$

yang berarti bahwa

$$(2.3.11) \quad [AA^{-1}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_{3 \times 3}$$

Simbol $[I]$ adalah menyatakan sebuah *matriks satuan* (*unit matrix*) atau sebuah *matriks identitas* (*identity matrix*), yaitu matriks bujur sangkar yang mempunyai harga 1 pada diagonal utama dan 0 di luar diagonal utama tersebut. Jadi, perkalian sebuah matriks dengan matriks inersinya, yang terdapat hanya jika tidak ada ketergantungan dalam matriks asli, adalah berupa sebuah matriks satuan. Sebuah matriks dengan ketergantungan disebut sebuah *matriks tunggal* (*singular matrix*).

Salah satu cara untuk mencari inersi dari sebuah matriks adalah dengan menyelesaikan persamaan simultan yang didapat dengan mempertukarkan ruas kiri dan ruas kanan dari Persamaan (2.3.1); yaitu

$$\begin{aligned} (2.3.12) \quad & 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = x_1 \\ & 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 = x_2 \\ & 8y_1 + 9y_2 + 6y_3 = x_3 \end{aligned}$$

Pemecahan ketiga Persamaan (2.3.12) menghasilkan

$$\begin{aligned} (2.3.13) \quad & y_1 = -\left(\frac{2}{4}\right)x_1 + \left(\frac{3}{4}\right)x_2 - \left(\frac{1}{4}\right)x_3 \\ & y_2 = +\left(\frac{13}{6}\right)x_1 - \left(\frac{5}{6}\right)x_2 + \left(\frac{1}{6}\right)x_3 \\ & y_3 = -\left(\frac{1}{4}\right)x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)x_2 - \left(\frac{1}{4}\right)x_3 \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan ini dapat ditemukan dengan membuat secara berturut-turut ($x_1 = +1, x_2 = 0, x_3 = 0$), ($x_1 = 0, x_2 = +1, x_3 = 0$), dan ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = +1$) agar supaya koefisien-koefisien pada kolom-kolom pertama, kedua dan ketiga dari Persamaan (2.3.13) dapat diperoleh secara terpisah. Jadi, inversi matriks dari matriks $[A]$ dalam Persamaan (2.3.3) adalah

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 \\ +5 & +6 & +7 \\ +8 & +9 & +6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ +\frac{13}{6} & -\frac{5}{3} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Suatu pengecekan harus dilakukan dengan meneliti bahwa

$$(2.3.14) \quad [AA^{-1}] = \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 \\ +5 & +6 & +7 \\ +8 & +9 & +6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ +\frac{13}{6} & -\frac{5}{3} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

2.4 Penyelesaian dari Persamaan Simultan Linear

Salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan simultan linear adalah dengan memakai cara Penghapusan Gauss-Jordan. Pada cara ini, penyelesaian dari satu sistem persamaan seperti

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_{34} \end{aligned}$$

dilakukan dengan jalan merubah dari matriks asli koefisien-koefisien melalui tiga penghapusan menjadi matriks akhir seperti terlihat di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \end{bmatrix} \rightarrow$$

(penghapusan eliminasi pertama)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a'''_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a'''_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a'''_{34} \end{bmatrix}$$

(penghapusan eliminasi kedua) (penghapusan eliminasi ketiga)

Matriks akhir menghasilkan penyelesaian

$$\{X\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'''_{14} \\ a'''_{24} \\ a'''_{34} \end{bmatrix}$$

Baris ke- i pada akhir dari penghapusan ke- i disebut *baris pasak* (*pivotal row*), di mana elemen-elemen yang bersangkutan diperoleh dengan cara membagi baris ke- i pada matriks yang terdahulu dengan a_{ii} (pasaknya) dalam matriks tersebut. Baris-baris lainnya di luar baris ke- i pada akhir penghapusan ke- i diperoleh dengan mengurangi, dari baris yang bersangkutan pada matriks yang terdahulu, perkalian dari sebuah bilangan konstan dan baris pasak (baris ke- i) dengan maksud untuk mendapatkan harga nol langsung di atas atau di bawah harga 1 dalam baris pasak tersebut.

Sebagai contoh, kolom-kolom inversi adalah

$$[A] = \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 \\ +5 & +6 & +7 \\ +8 & +9 & +6 \end{bmatrix}$$

dalam bab yang terdahulu dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan tiga sistem dari tiga persamaan linear

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 1, & 0, & 0 \\ 5y_1 + 6y_2 + 7y_3 &= 0, & 1, & 0 \\ 8y_1 + 9y_2 + 6y_3 &= 0, & 0, & 1 \end{aligned}$$

Penghapusan dimensi Gauss-Jordan, secara berurutan adalah

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 & +1 & 0 & 0 \\ +5 & +6 & +7 & 0 & +1 & 0 \\ +8 & +9 & +6 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & +\frac{3}{2} & +2 & +\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{5}{2} & +1 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \quad \text{(penghapusan/eliminasi pertama)} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & -2 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & +\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & +1 & -2 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & +1 & 0 & +\frac{13}{6} & -\frac{5}{3} & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & +1 & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ & \quad \text{(penghapusan/eliminasi kedua) (penghapusan/eliminasi ketiga)} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 \\ +5 & +6 & +7 \\ +8 & +9 & +6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ +\frac{13}{6} & -\frac{5}{3} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Perhatikan, misalnya pada penghapusan pertama, baris kedua $(0, -\frac{3}{2}, -3, -\frac{5}{2}, +1, 0)$ diperoleh dengan jalan mengurangi $+5$ kali baris pasak $(+1, +\frac{3}{2}, +2, +\frac{1}{2}, 0, 0)$ dari baris kedua matriks asli $(+5, +6, +7, 0, +1, 0)$. Dengan cara yang sama, baris ketiga $(0, -3, -10, -4, 0, +1)$ diperoleh dengan mengurangi $+8$ kali baris pasak $(+1, +\frac{3}{2}, +2, +\frac{1}{2}, 0, 0)$ dari baris ketiga matriks asli $(+8, +9, +6, 0, 0, +1)$.

Pada penyelesaian ini, pasak-pasak yang diambil berturut-turut mulai a'_{11} , melalui a'_{22} , sampai a'_{33} . Di samping cara ini masih terdapat berbagai variasi cara-cara lainnya untuk penyelesaian yang lebih cermat, dan untuk penjelasannya yang lebih lengkap dapat ditemui dalam buku tentang analisis numerik.

Seperti telah dibahas dalam bab yang terdahulu, sebuah matriks bujur-sangkar dengan ketergantungan tidak mempunyai inversi dan disebut matriks tunggal. Matriks berikut ini adalah matriks tunggal karena pada akhir penghapusan kedua, pada baris ketiga terbaca

$$0y_1 + 0y_2 + 0y_3 = +1, \quad -2, \quad +1$$

di mana hal ini tidak mungkin.

$$\begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 & +1 & 0 & 0 \\ +5 & +6 & +7 & 0 & +1 & 0 \\ +8 & +9 & +10 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} +1 & +\frac{3}{2} & +2 & +\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{5}{2} & +1 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

(penghapusan pertama)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & -2 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +2 & +\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

(penghapusan kedua)

Di sini ketergantungan itu adalah nyata karena selisih antara baris pertama dan baris kedua pada matriks asli sama dengan selisih antara baris ketiga dan baris kedua. Demikian juga terlihat dalam aljabar matriks bahwa determinan dari matriks tunggal sama dengan nol; yaitu

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} +2 & +3 & +4 \\ +5 & +6 & +7 \\ +8 & +9 & +10 \end{bmatrix} = (+2)(+6)(+10) + (+5)(+9)(+4) + (+8)(+3)(+7) \\ & \quad - (+8)(+6)(+4) - (+5)(+3)(+10) - (+2)(+9)(+7) \\ & \quad = 120 + 180 + 168 - 192 - 150 - 126 = 0 \end{aligned}$$

LATIHAN 2.4

Dengan cara penghapusan Gauss-Jordan, carilah inversi matriks dari

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{4} & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ +\frac{13}{6} & -\frac{5}{3} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

LATIHAN 2.5

Dengan cara penghapusan Gauss-Jordan, carilah inversi matriks dari

$$\begin{bmatrix} +a & +b \\ +b & +c \end{bmatrix}$$

2.5 Catatan Penutup

Sebelum mempelajari buku ini, diharapkan bahwa para mahasiswa telah mendapatkan pelajaran tentang matriks atau aljabar linear. Namun demikian, bagi mereka yang belum pernah mengetahui sama sekali tentang matriks, buku ini memberikan pengertian minimum tentang definisi matriks, perkalian matriks dan inversi matriks. Hanya pokok-pokok yang diperlukan dalam pembahasan bab-bab selanjutnya saja yang diberikan di sini.

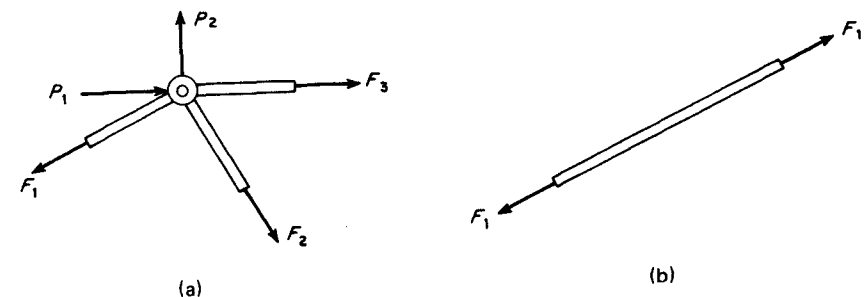
Para mahasiswa dianjurkan untuk mengerjakan kelima buah soal latihan dalam bab ini. Latihan 2.2 dan 2.3 memperlihatkan pengaruh dari sebuah *matriks diagonal* (sebuah matriks persegi di mana elemen-elemen yang tidak sama dengan nol terletak hanya pada diagonal) jika dipakai sebagai matriks yang dikalikan atau sebagai matriks pengali. Inversi dari matriks pada Soal latihan 2.4 harus sama dengan matriks asli dalam pembahasan pada Pasal 2.3. Penting untuk dicatat dan diingat secara khusus tentang kebalikan dari matriks dalam soal latihan 2.5, karena hal ini nantinya akan sangat berguna pada saat pembahasan matriks kekakuan dan matriks kelenturan dari suatu bagian konstruksi yang mengalami lentur.

Rangka Statik Tertentu (Statically Determinate Trusses)

3

3.1 Definisi suatu Rangka Statik Tertentu

Suatu *rangka (truss)* adalah suatu struktur kerangka yang terdiri dari sejumlah tertentu batang-batang yang dihubungkan satu sama lain dengan perantaraan titik-titik simpul yang berupa sendi tanpa gesekan di mana gaya-gaya luar bekerja melalui titik-titik ini. Contoh khas dari suatu titik simpul dapat dilihat dalam Gambar 3.1a, di mana sebuah pasak dimasukkan ke dalam ujung-ujung batang yang berlubang. Batang-batang ini bebas berputar pada pasak sebagai sumbunya. Inilah yang menjadi dasar pembahasan dalam Bab 3 ini. Jika batang-batang ini disambung dengan dilas satu sama lain, maka titik simpulnya menjadi *titik simpul kaku (rigid joint)*; selanjutnya struktur



GAMBAR 3.1. Suatu Titik Simpul yang khas dan Batang dari suatu Rangka.

kerangka ini disebut *kerangka kaku (rigid frame)*, dan bukan merupakan rangka lagi.

Selama gaya-gaya eksternal bekerja hanya pada titik-titik simpul, maka di setiap batang dalam sebuah rangka akan bekerja sepasang gaya aksial yang sama besar tapi berlawanan arah; oleh karenanya diberi nama *batang-batang dua-gaya (two-force members)*. Kenyataan ini dapat dipastikan dengan memandang batang tersebut tanpa titik-titik simpul seperti terlihat dalam Gambar 3.1b. Gaya-gaya internal yang tidak diketahui adalah berupa gaya-gaya aksial F_j , untuk $j = 1$ sampai $j = NF$, di mana NF adalah jumlah total batang pada sebuah struktur rangka.

Untuk dapat meletakkan sebuah rangka dua dimensi dalam bidang datarnya, paling sedikit harus ada sebuah penyangga sendi dan sebuah penyangga rol; atau sebagai pilihan lain yang tidak umum, tiga perletakan rol dengan reaksi-reaksi perletakan yang sejajar tidak lebih dari dua. Pada sebuah penyangga sendi terdapat dua komponen reaksi penyangga yang tidak diketahui, dan pada sebuah penyangga rol terdapat sebuah reaksi penyangga yang tidak diketahui. Jadi jumlah total dari komponen-komponen reaksi penyangga yang tidak diketahui (NR) harus sama dengan atau lebih dari tiga.

Setiap sistem gaya eksternal yang bekerja pada sebuah rangka dua dimensi dapat diuraikan dengan besarnya dalam dua arah pada semua titik-titik simpul, dengan perkecualian bagi titik simpul dengan komponen-komponen reaksi yang tidak diketahui yang sudah ada. Jika NP adalah jumlah total arah-arah bekerjanya gaya-gaya eksternal yang mungkin, dan NJ adalah jumlah keseluruhan titik-titik simpul, maka

$$(3.1.1) \quad NP + NR = 2(NJ)$$

Karena jumlah total persamaan kesetimbangan statik yang tersedia untuk sebuah rangka dua dimensi adalah sama dengan $2(NJ)$ dan jumlah total dari gaya-gaya yang tidak diketahui sama dengan $(NF + NR)$, maka persyaratan yang diperlukan untuk ketertentuan statis adalah

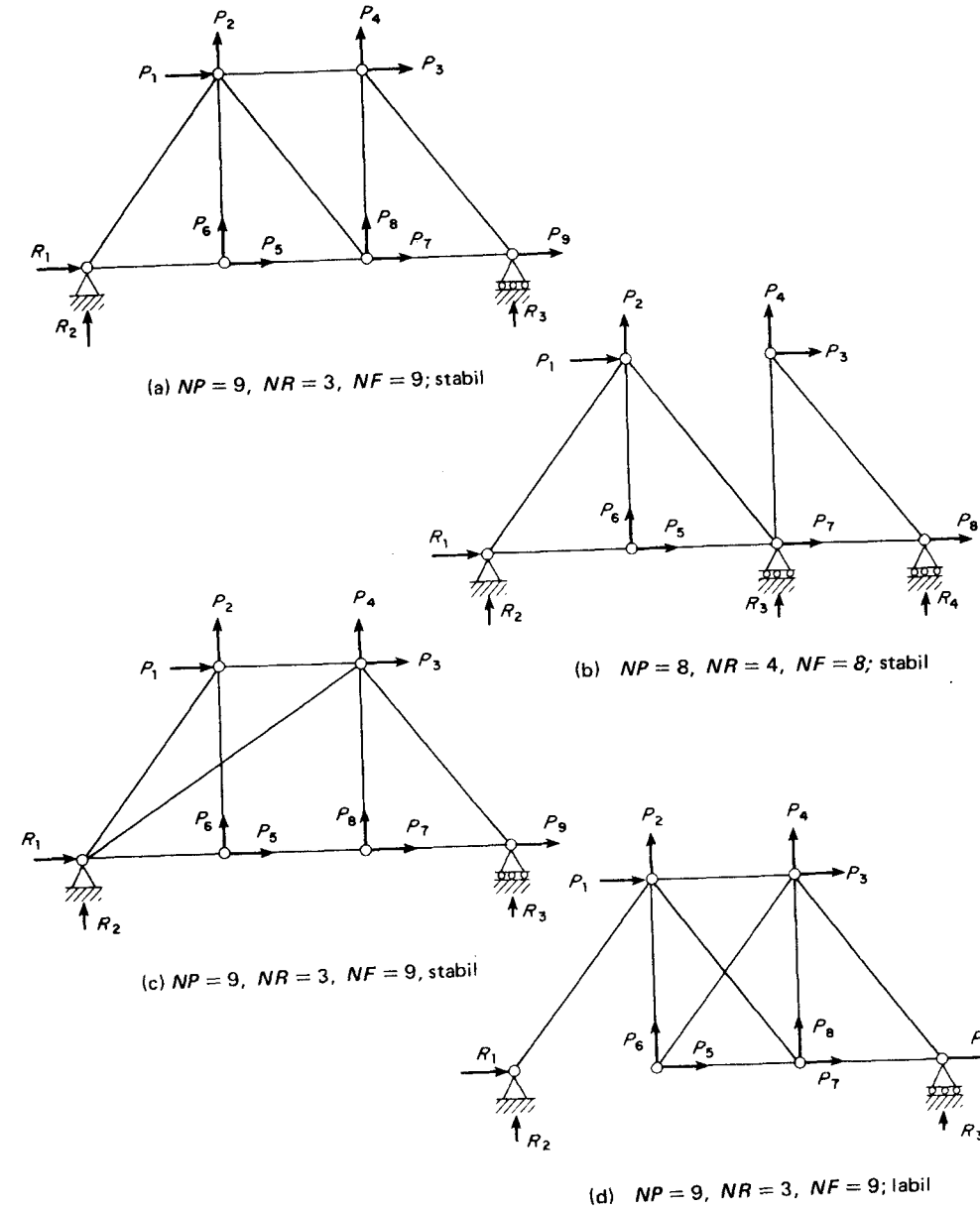
$$(3.1.2) \quad NF + NR = 2(NJ)$$

Dari Persamaan (3.1.1) dan (3.1.2), didapat

$$(3.1.3) \quad NP = NF$$

Persamaan (3.1.3) menyatakan bahwa untuk suatu rangka statik tertentu, jumlah arah bekerjanya gaya-gaya eksternal yang mungkin adalah sama dengan jumlah batang pada rangka tersebut.

Sebagai contoh, keempat rangka dalam Gambar 3.2 semuanya memenuhi persyaratan $NP = NF$, meskipun hanya tiga rangka pertama yang stabil secara statis.



GAMBAR 3.2. Rangka-rangka Statik Tertentu yang khas. [Rangka pada gambar (d) dalam keadaan labil].

3.2 Cara Konvensional dari Titik Simpul dan Cara Pemotongan

Analisis dari suatu rangka meliputi penentuan komponen-komponen reaksi eksternal dan gaya-gaya internal aksial untuk tiap sistem pembebanan gaya eksternal yang diketahui. Dalam bab ini hanya dibahas mengenai rangka statik tertentu yang stabil, oleh karenanya pertama sekali perlu untuk memastikan kedua persyaratan yang harus dipenuhinya. Persyaratan $NP = NF$ seperti yang telah diuraikan dalam pasal di muka adalah persyaratan untuk statik tertentu tetapi tidak dapat dipakai untuk dapat mengetahui ketidakstabilan statiknya. Karakteristik yang terakhir ini umumnya hanya dapat diketahui oleh seorang ahli yang sudah berpengalaman dari permulaannya, sedangkan bagi para pemula biasanya sukar untuk menerka sampai pada akhirnya menemui kesulitan dalam penyelesaian analisis struktur tersebut.

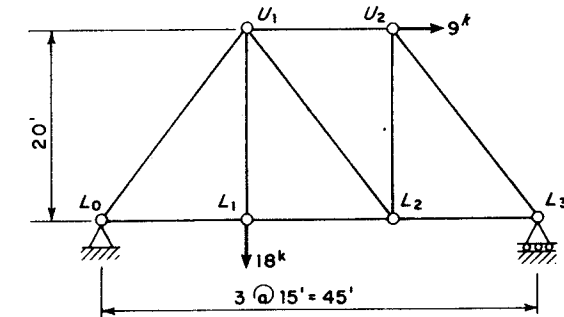
Cara konvensional untuk menganalisis rangka statik tertentu umumnya dimulai dengan mencari komponen-komponen reaksi penyangga terlebih dahulu. Jika jumlah totalnya sama dengan tiga, maka penyelesaiannya dilakukan dengan menganggap rangka tersebut secara keseluruhan sebagai suatu bagian lepas (free body). Selanjutnya dicari untuk tiap titik simpul yang berturutan, di mana hanya terdapat dua buah gaya aksial yang tidak diketahui dan menghitung gaya-gaya ini dengan membuat titik simpul yang bersangkutan sebagai sebuah bagian lepas. Prosedur ini dilanjutkan sampai seluruh gaya internal aksial didapatkan dan dihitung; oleh karenanya cara ini disebut *cara titik-titik simpul*. Karena jumlah total dari persamaan-persamaan kesetimbangan titik simpul adalah tiga lebih banyak daripada jumlah gaya aksial yang tidak diketahui, maka akan terdapat kelebihan tiga buah persamaan yang dapat dipakai untuk pemeriksaan kembali, yaitu setelah seluruhnya gaya aksial didapatkan.

Jika dalam mencari titik simpul yang berturutan tidak didapatkan titik simpul dengan sisa dua gaya batang yang tidak diketahui, maka selanjutnya jalan yang dapat ditempuh cara lain yaitu dengan mencari sekelompok titik-titik simpul (*sebagian dari rangka*) di mana terdapat tidak lebih dari tiga gaya batang yang bekerja pada bagian rangka tersebut, penyelesaian selanjutnya dilakukan dengan menganggap potongan/bagian rangka tersebut sebagai suatu bagian lepas, oleh karenanya cara ini disebut *cara pemotongan* (method of sections). Dalam banyak hal cara pemotongan ini dapat dipakai sebagai pengganti cara titik simpul. tanpa menghiraukan apakah ada atau tidak titik-titik simpul dengan dua gaya batang yang tidak diketahui.

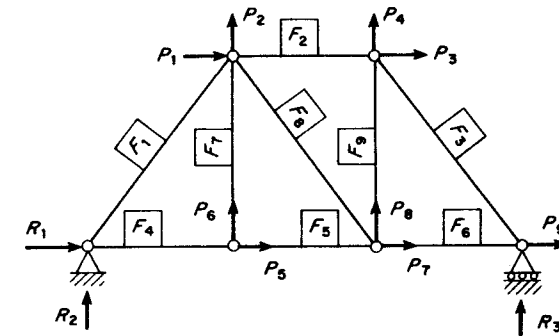
Jika jumlah total dari komponen-komponen reaksi penyangga lebih dari tiga, dan rangka adalah statik tertentu, selanjutnya harus dicari titik simpul dengan dua gaya batang yang tidak diketahui atau (kelompok titik simpul) dengan tiga gaya batang yang tidak diketahui, dan mulai dari sini. Dalam setiap keadaan, suatu pemeriksaan terakhir tentang benar atau tidaknya

penyelesaian harus dilakukan dengan menempatkan seluruh gaya aksial dengan komponen horisontal dan vertikalnya pada suatu diagram rangka dan memastikan bahwa kedua persamaan statik, $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$, dipenuhi pada setiap titik simpul.

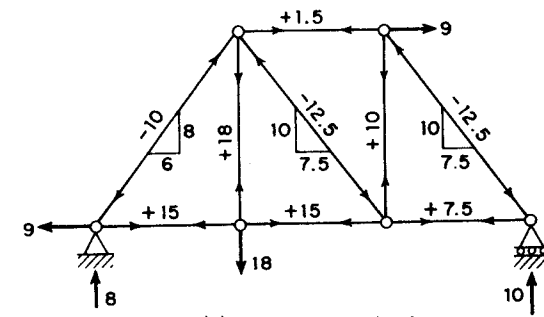
Contoh Soal 3.1. Analisis rangka dalam Gambar 3.3a dengan pertama-tama memperhatikan $NP = NF$; kemudian mencari komponen-komponen



(a) Rangka yang diketahui

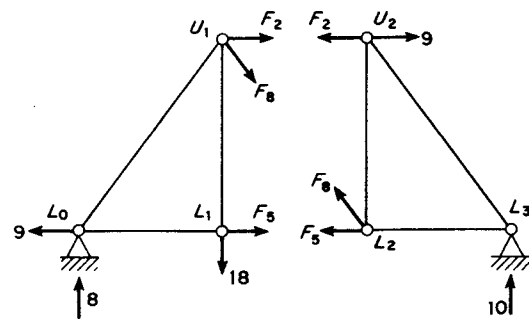


(b) $NP = NF = 9$



(c) Diagram penyelesaian

GAMBAR 3.3. Rangka dari Contoh Soal 3.1 dan 3.2.



(d) Cara pemotongan

GAMBAR 3.3. (lanjutan).

reaksi penyangganya; dan akhirnya, menghitung gaya-gaya aksial dalam semua batang dengan cara titik simpul.

Penyelesaian. Dari Gambar 3.3b, $NP = NF = 9$. Nilai-nilai yang terlihat dalam diagram jawaban pada Gambar 3.3c didapat melalui langkah-langkah yang dapat dilihat dalam Daftar 3.1. Perlu diperhatikan bahwa Gambar 3.3c sebenarnya adalah merupakan diagram bagian lepas komposit dari semua titik-titik simpul. Tarikan, terjadi jika batang menarik titik simpul, sedangkan tekanan, terjadi jika batang menekan titik simpul.

DAFTAR 3.1 Perhitungan untuk Gambar 3.3c.

Bagian lepas	$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma M = 0$
Rangka keseluruhan	(2) $R_1 = -9$	(3) $R_2 = +8$	(1) ΣM thd. L_0 , $R_3 = +10$ (4) Periksa ΣM terhadap L_3 .
Titik simpul U_1	(10) $F_2 = +1.5$	(9) $F_8 = -12.5$	
Titik simpul U_2	(15) Periksa No. 2	(16) Periksa No. 3	
Titik simpul L_0	(6) $F_4 = +15$	(5) $F_1 = -10$	
Titik simpul L_1	(8) $F_5 = +15$	(7) $F_7 = +18$	
Titik simpul L_2	(14) Periksa No. 1	(13) $F_9 = +10$	
Titik simpul L_3	(12) $F_6 = +7.5$	(11) $F_3 = -12.5$	

Contoh Soal 3.2. Dengan menganggap bahwa komponen-komponen reaksi penyangga yang bekerja pada rangka dalam Gambar 3.3a telah selesai dihitung, tentukanlah F_2 , F_5 , dan F_8 dengan cara pemotongan.

Penyelesaian. Rangka secara keseluruhan dapat dipotong menjadi dua bagian. Bagian pertama terdiri dari titik-titik simpul L_0 - U_1 - L_1 dan bagian yang lain terdiri dari titik-titik simpul L_3 - L_2 - U_2 , seperti terlihat dalam Gambar 3.3d. Selanjutnya dengan memperhatikan potongan sebelah kiri sebagai suatu bagian lepas,

$$1) \Sigma M \text{ terhadap } L_2 = 0,$$

$$+8(30) - 18(15) + F_2(20) = 0$$

$$F_2 = +1.5 \text{ kips}$$

Perhatikan bahwa "titik" L_2 walaupun tidak terletak pada bagian lepas sebelah kiri, tetapi merupakan titik potong antara garis kerja gaya-gaya F_5 dan F_8 .

$$2) \Sigma M \text{ terhadap } U_1 = 0,$$

$$+9(20) + 8(15) - F_5(20) = 0$$

$$F_5 = +15 \text{ kips}$$

$$3) \Sigma F_y = 0,$$

$$+8 - 18 - 0.8F_8 = 0$$

$$F_8 = -12.5 \text{ kips}$$

Dengan memakai potongan sebelah kanan sebagai bagian lepas,

$$4) \Sigma M \text{ terhadap } L_2 = 0,$$

$$-10(15) + 9(20) - F_2(20) = 0$$

$$F_2 = +1.5 \text{ kips}$$

$$5) \Sigma M \text{ terhadap } U_1 = 0,$$

$$-10(30) + F_5(20) = 0$$

$$F_5 = +15 \text{ kips}$$

$$6) \Sigma F_y = 0,$$

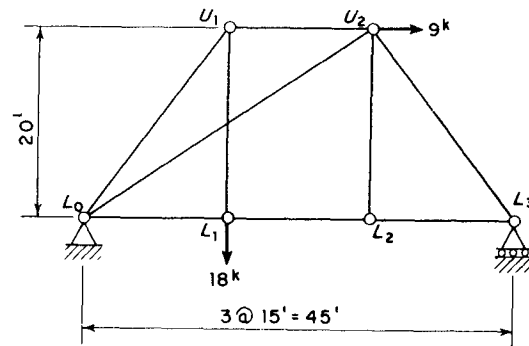
$$+10 + 0.8F_8 = 0$$

$$F_8 = -12.5 \text{ kips}$$

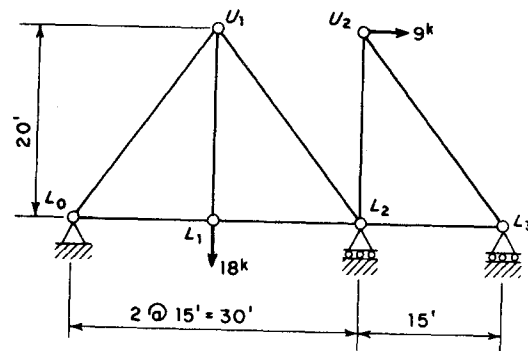
Cara pemotongan ini merupakan suatu cara yang mudah dan dapat dipakai secara langsung untuk menentukan gaya aksial pada tiap sebuah batang tertentu dalam suatu rangka yang kompleks jika rangka tersebut dapat dipotong menjadi dua bagian melalui tidak lebih dari tiga buah batangnya.

LATIHAN 3.1 sampai 3.4

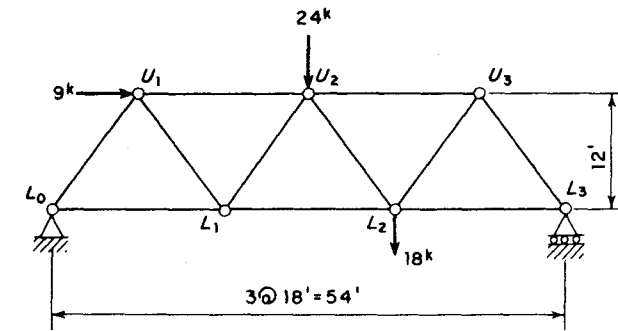
Diketahui rangka-rangka batang statik tertentu seperti terlihat pada Gambar 3.4 sampai 3.7. Diminta untuk menganalisis rangka-rangka tersebut dengan memakai cara titik simpul. Selanjutnya pilihlah beberapa batang dan tentukan gaya-gaya aksial dalam batang-batang tersebut dengan memakai cara pemotongan.



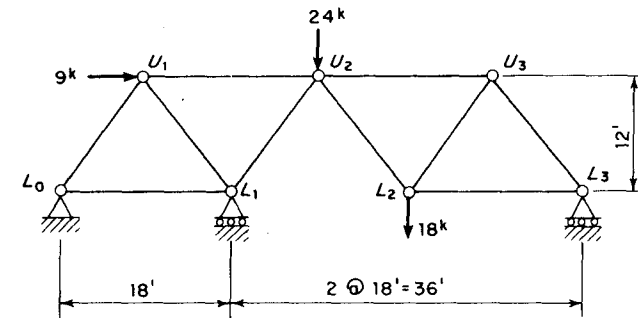
GAMBAR 3.4. Latihan 3.1.



GAMBAR 3.5. Latihan 3.2.



GAMBAR 3.6. Latihan 3.3.



GAMBAR 3.7. Latihan 3.4.

3.3 Cara Matriks dari Titik-titik Simpul

Untuk suatu rangka statik tertentu, telah ditunjukkan bahwa jumlah arah bekerjanya gaya-gaya eksternal yang mungkin, NP , harus sama dengan jumlah gaya-gaya aksial, NF . Misalkan $P(1)$ sampai dengan $P(NP)$ sebagai gaya-gaya eksternal yang diketahui dan $F(1)$ sampai dengan $F(NF)$ sebagai gaya-gaya internal aksial yang tidak diketahui. Dengan menghubungkan kedua himpunan-himpunan variabel ini diperoleh persamaan-persamaan statik NP , masing-masing sebuah untuk setiap arah P , sebagai berikut

$$(3.3.1) \quad P(I) = A(I, 1) * F(1) + A(I, 2) * F(2) + \dots + A(I, NF) * F(NF) \\ \text{untuk } I = 1 \text{ sampai } I = NP$$

Dalam bentuk matriks, Persamaan (3.3.1) menjadi

$$(3.3.2) \quad \{P\}_{NP \times 1} = [A]_{NP \times NF} \{F\}_{NF \times 1}$$

Matriks $[A]$ yang dinyatakan dalam Persamaan (3.3.2) disebut *matriks statika* (*statics matrix*) karena baris-baris dalam matriks ini merupakan persamaan-persamaan statik untuk titik-titik simpul.

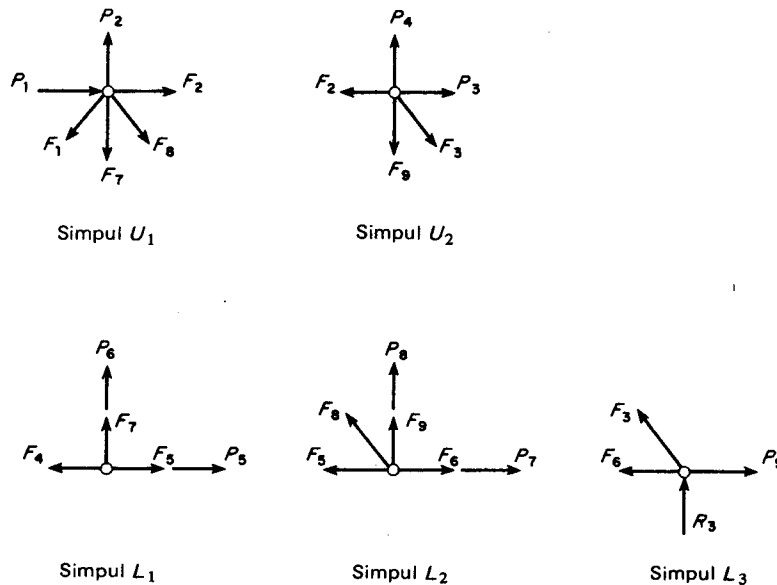
Selama matriks $[A]$ ini merupakan matriks bujur-sangkar, sebagaimana yang seharusnya untuk suatu rangka statik tertentu, maka Persamaan (3.3.2) dapat ditulis sebagai

$$(3.3.3) \quad \{F\}_{NP \times 1} = [A^{-1}]_{NP \times NP} \{P\}_{NP \times 1}$$

Persamaan yang terakhir ini dapat diprogram pada komputer dengan matriks gaya eksternal $\{P\}$ dan matriks statik $[A]$ sebagai masukan, dan matriks gaya internal $\{F\}$ sebagai keluarannya.

Arti fisik dari matriks $[A^{-1}]$ adalah bahwa kolom-kolom matriks ini memberikan gaya-gaya aksial akibat tiap gaya eksternal satuan. Untuk meningkatkan kemahiran maka matriks $[A^{-1}]$ dapat ditentukan dengan cara simpul dan pemotongan yang konvensional, dan selanjutnya pemeriksaan dilakukan dengan membuktikan bahwa $[A][A^{-1}] = [I]$.

Jika terdapat suatu inversi dari matriks statika $[A]$, rangka tersebut secara statik adalah stabil, tetapi jika matriks statika $[A]$ merupakan matriks tunggal, maka rangka ini secara statik adalah labil.



GAMBAR 3.8. Diagram Bagian Lepas dari Titik-titik Simpul dalam Contoh soal 3.3.

Contoh Soal 3.3. Dari rangka statik tertentu pada Gambar 3.3a dan b; susunlah matriks statika $[A]$, tentukan matriks $[A^{-1}]$ secara langsung dari pengertian fisiknya, dan buktikan hubungan $[A][A^{-1}] = [I]$; kemudian carilah matriks gaya internal $\{F\}$ untuk matriks $\{P\}$ yang diketahui melalui persamaan $\{F\} = [A^{-1}]\{P\}$.

Penyelesaian. Matriks statika $[A]$ dapat disusun dengan mudah dari persamaan-persamaan statika. Misalnya dengan menggunakan $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$ untuk diagram bagian lepas dari titik hubung U_1 pada Gambar 3.8,

$$P_1 = +0.6F_1 - 1.0F_2 - 0.6F_8$$

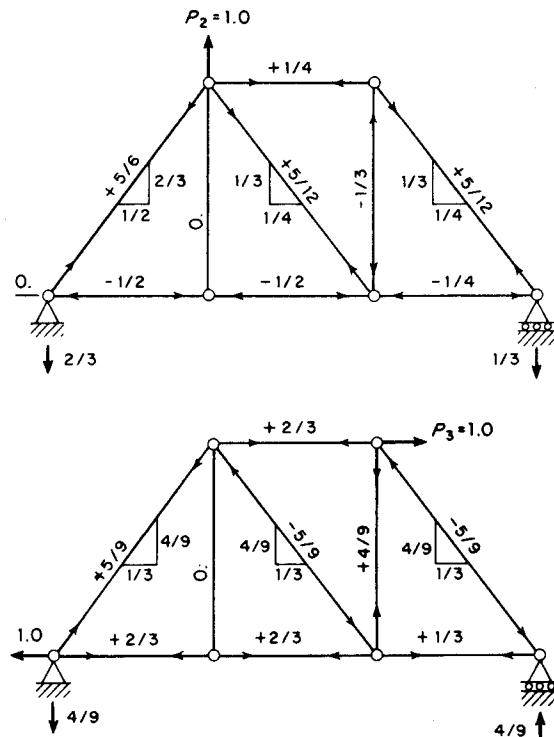
$$P_2 = +0.8F_1 + 1.0F_7 + 0.8F_8$$

$[A]_{9 \times 9} =$

$P \backslash F$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+0.6	-1.0						-0.6	
2	+0.8						+1.0	+0.8	
3		+1.0	-0.6						
4			+0.8						+1.0
5				+1.0	-1.0				
6							-1.0		
7					+1.0	-1.0		+0.6	
8								-0.8	-1.0
9			+0.6			+1.0			

Setiap kolom dari matriks $[A^{-1}]$ menunjukkan gaya-gaya batang akibat tiap nilai satuan dari gaya P . Sebagai contoh, kolom kedua dan ketiga dalam matriks $[A^{-1}]$ adalah diambil dari diagram gaya aksial pada Gambar 3.9.

Walaupun tidak diperlihatkan, namun pembuktian $[A][A^{-1}] = [I]$ telah dibuat. Demikian juga, matriks gaya internal $\{F\}$ yang dihitung dari $\{F\} = [A^{-1}]\{P\}$ cocok sekali dengan nilai-nilai pada diagram penyelesaian dalam Gambar 3.3c.



GAMBAR 3.9. Gaya-gaya Aksial Akibat Gaya-gaya Eksternal Satuan dalam Contoh Soal 3.3.

LATIHAN 3.5 dan 3.6

Untuk tiap rangka statik tertentu dalam soal Latihan 3.1 dan 3.2 (Gambar 3.6 dan 3.7): susunlah matriks statika $[A]$ tentukan matriks $[A^{-1}]$ secara langsung dengan arti fisiknya, dan buktikan hubungan $[A][A^{-1}] = [I]$; kemudian carilah matriks gaya internal $\{F\}$ untuk matriks $\{P\}$ yang diketahui dari persamaan $\{F\} = [A^{-1}]\{P\}$. (lihat halaman 39).

3.4 Cara Grafik dari Titik-titik Simpul (Matrix Method of Joints)

Cara grafik dari titik-titik simpul merupakan pasangan dari cara konvensional titik simpul. Pemakaian cara grafik ini sangat cocok dalam hal-hal di mana jumlah komponen-komponen reaksi penyangga sama dengan tiga dan susunan rangka tersebut terdiri dari batang-batang yang membentuk segitiga-segitiga. Pertama sekali, komponen-komponen reaksi penyangga harus dihitung terlebih dahulu secara aljabar. (Cara grafik diuraikan di sini hanya dipakai untuk penentuan gaya-gaya internal aksial saja).

$$[A^{-1}]_{9 \times 9} =$$

$\begin{matrix} P \\ F \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$+\frac{5}{9}$	$+\frac{5}{6}$	$+\frac{5}{9}$	$+\frac{5}{12}$	0	$+\frac{5}{6}$	0	$+\frac{5}{12}$	0
2	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{2}$	0
3	$-\frac{5}{9}$	$+\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{9}$	$+\frac{5}{6}$	0	$+\frac{5}{12}$	0	$+\frac{5}{6}$	0
4	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	+1	$-\frac{1}{2}$	+1	$-\frac{1}{4}$	+1
5	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	+1	$-\frac{1}{4}$	+1
6	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	+1
7	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
8	$-\frac{5}{9}$	$+\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{12}$	0	$+\frac{5}{12}$	0	$-\frac{5}{12}$	0
9	$+\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{9}$	$+\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0

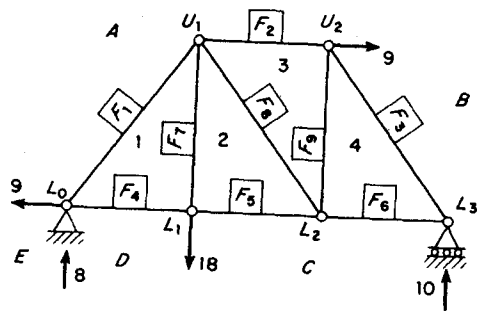
$$\{P\}_{9 \times 1} =$$

1	0.0
2	0.0
3	+9.0
4	0.0
5	0.0
6	-18.0
7	0.0
8	0.0
9	0.0

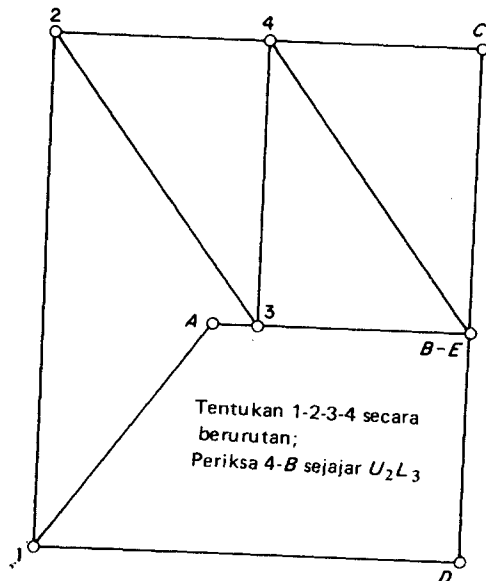
$$\{F\}_{9 \times 1} = [A^{-1}]\{P\} =$$

1	-10.0
2	+ 1.5
3	-12.5
4	+15.0
5	+15.0
6	+ 7.5
7	+18.0
8	-12.5
9	+10.0

Rangka pada Contoh Soal 3.1, diperlihatkan kembali dalam Gambar 3.10a, mempunyai tiga komponen reaksi penyangga dan terdiri dari empat buah segitiga yang diberi tanda dengan nomor 1, 2, 3, dan 4 mulai dari sebelah kiri. Ruang-ruang antara Gaya-gaya eksternal dan reaksi-reaksi penyangga diberi tanda $A-B-C-D-E-A$ sekeliling rangka sesuai arah jarum jam sehingga vektor gaya $A-B-C-D-E-A$ membentuk sebuah poligon tertutup pada Gambar 3.10b.



(a) Diagram rangka
(Lihat Contoh Soal 3.1)



(b) Diagram gaya

GAMBAR 3.10. Cara Grafik dari Titik-titik Simpul.

Setiap gaya internal diberi nama dengan dua simbol pada sebelah menyebelah batang yang bersangkutan yang diambil menurut urutan sesuai arah jarum jam mengelilingi sebuah titik simpul; sebagai misal, F_1 adalah gaya batang dalam arah 1-A pada Gambar 3.10b dan bekerja pada titik simpul sebelah atas pada Gambar 3.10a, akan tetapi gaya batang ini dalam arah A-1 pada Gambar 3.10b dan bekerja pada titik simpul sebelah bawah pada Gambar 3.10a. Titik-titik 1-2-3-4 pada diagram gaya Gambar 3.10b ditentukan secara berturut-turut; misalnya, titik 1 adalah perpotongan dari A-1 sejajar F_1 dan D-1 sejajar F_4 . Jadi poligon tertutup A-1-D-E-A dalam diagram gaya pada Gambar 3.10b diperoleh dari pembacaan A-1-D-E-A sekeliling titik simpul L_0 pada diagram rangka Gambar 3.10a. Diagram gaya aksial dengan demikian merupakan superposisi dari semua poligon gaya untuk bagian-bagian lepas titik simpul.

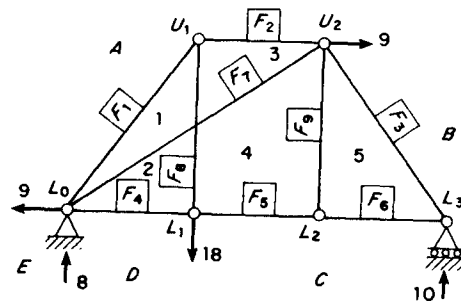
Besarnya tiap gaya aksial dapat diukur dari diagram gaya, dan sifatnya (tekan atau tarik), ditentukan dengan memperhatikan arah bekerjanya gaya tersebut terhadap titik simpul yang bersangkutan. Gaya-gaya batang untuk rangka pada Gambar 3.10,

$$\begin{aligned} F_1 &= A-1 \text{ di } L_0 = 1-A \text{ di } U_1 = 10 \text{ kips tekan} \\ F_2 &= A-3 \text{ di } U_1 = 3-A \text{ di } U_2 = 1.5 \text{ kips tarik} \\ F_3 &= B-4 \text{ di } U_2 = 4-B \text{ di } L_3 = 12.5 \text{ kips tekan} \\ F_4 &= 1-D \text{ di } L_0 = D-1 \text{ di } L_1 = 15 \text{ kips tarik} \\ F_5 &= 2-C \text{ di } L_1 = C-2 \text{ di } L_2 = 15 \text{ kips tarik} \\ F_6 &= 4-C \text{ di } L_2 = C-4 \text{ di } L_3 = 7.5 \text{ kips tarik} \\ F_7 &= 2-1 \text{ di } U_1 = 1-2 \text{ di } L_1 = 18 \text{ kips tarik} \\ F_8 &= 3-2 \text{ di } U_1 = 2-3 \text{ di } L_2 = 12.5 \text{ kips tekan} \\ F_9 &= 4-3 \text{ di } U_2 = 3-4 \text{ di } L_2 = 12.5 \text{ kips tekan} \end{aligned}$$

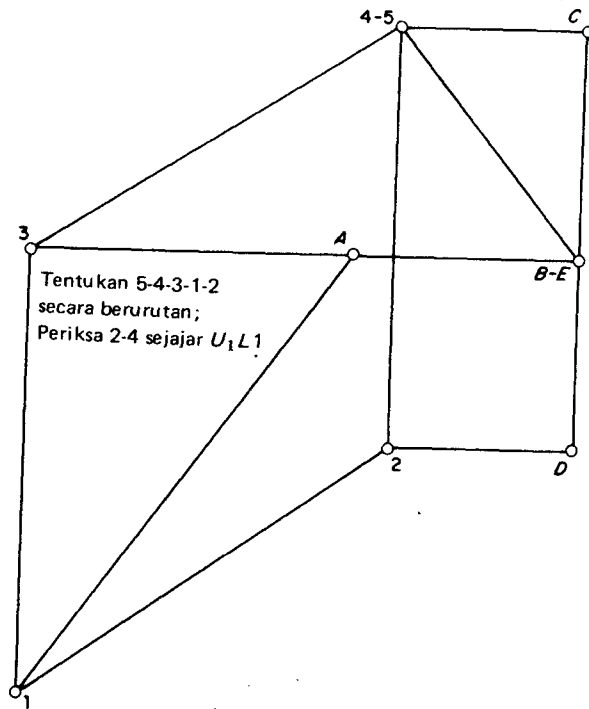
Perhatikan dalam Gambar 3.11 penyelesaian secara grafis untuk rangka dalam Soal latihan 3.1, gaya aksial F_8 sama dengan 3-1 bekerja di U_1 atau 2-4 bekerja di L_1 , dan F_1 sama dengan 1-2 bekerja di L_0 atau 4-3 bekerja di U_2 .

LATIHAN 3.7

Analisis rangka pada Soal latihan 3.3 (Gambar 3.6) dengan menggunakan cara grafis.



(a) Diagram rangka
(Lihat Contoh Soal 3.1)

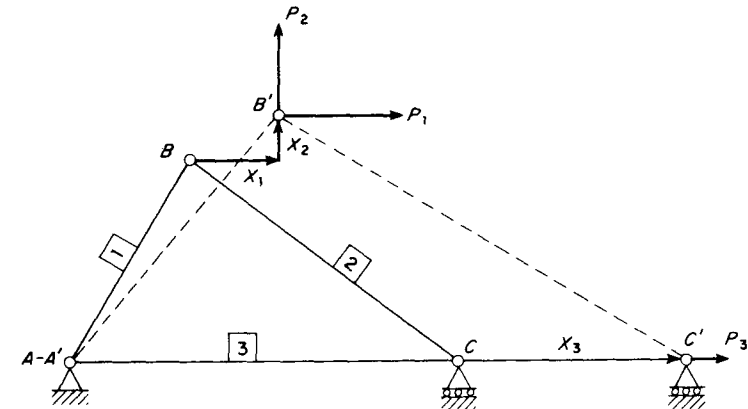


(b) Diagram gaya

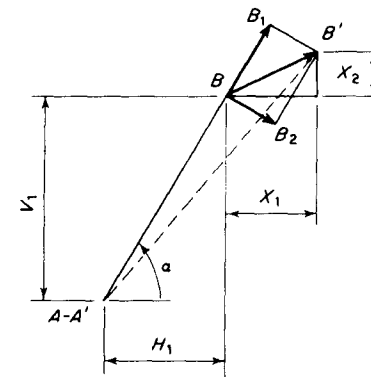
GAMBAR 3.11. Cara Grafik dari Titik-titik Simpul.

3.5 Lendutan (deflection) dengan Persamaan Perpindahan Titik Simpul (Deflections by Joint Displacement Equation)

Jika beban-beban P_1 , P_2 , dan P_3 diterapkan secara berangsur-angsur pada sebuah rangka ABC yang tidak mengalami tegangan dan perubahan bentuk seperti terlihat dalam Gambar 3.12a, maka rangka ini akan mendapat te-



(a)



(b)

GAMBAR 3.12. Definisi dari Lendutan (defleksi) Rangka.

gangan dan berubah bentuk menjadi $A'B'C'$. Perpindahan (displacement) $A-A'$, $B-B'$, dan $C-C'$ didefinisikan sebagai lendutan (deflection) dari rangka tersebut; perpindahan ini merupakan fungsi daripada bentuk rangka asli, luas penampang batang, modulus elastik dan beban-beban yang diterapkan.

Jika besarnya perpindahan X_1 , X_2 , dan X_3 diketahui, maka akan timbul pertanyaan tentang berapa besarnya beban P_1 , P_2 , dan P_3 . Perhitungan ini akan meliputi: 1) perpanjangan dari batang-batang dan gaya-gaya aksial yang bekerja pada batang tersebut; dan 2) gaya-gaya P_1 , P_2 , dan P_3 yang membuat titik-titik B' dan C' dalam kesetimbangan.

Mengenai perpanjangan dari batang, pendekatan yang paling tepat yaitu yang menyatakan bahwa perpanjangan e dari setiap batang adalah

$$e = L' - L_0$$

di mana L' dan L_0 secara berturut-turut adalah panjang batang setelah dan sebelum berubah bentuk (mengalami perpanjangan). Misalnya,

$$(3.5.1) \quad e_1 \text{ (dalam Gambar 3.12)} = \sqrt{(H_1 + X_1)^2 + (V_1 + X_2)^2} - \sqrt{H_1^2 + V_1^2}$$

Pendekatan kira-kira yaitu dengan cara menguraikan lendutan BB' menjadi komponen aksial BB_1 dan komponen melintang BB_2 ; dengan cara ini perpanjangan batang AB adalah

$$(3.5.2) \quad e_1 \text{ (Gambar 3.12)} = BB_1 = X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha$$

Oleh karena pada umumnya lendutan ini sangat kecil apabila dibandingkan dengan dimensi batang aslinya, maka cara pendekatan kedua ini tidak saja memberikan hasil yang cukup tepat akan tetapi juga memungkinkan perhitungan-perhitungan lendutan dari rangka secara langsung. Pada pembahasan selanjutnya dalam buku ini, perpanjangan akan selalu didasarkan pada anggapan ini.

Setelah perpanjangan batang dihitung, selanjutnya gaya tarik dalam batang dapat dicari dengan mempergunakan Hukum Hooke

$$(3.5.3) \quad F = \frac{EA}{L_0} e$$

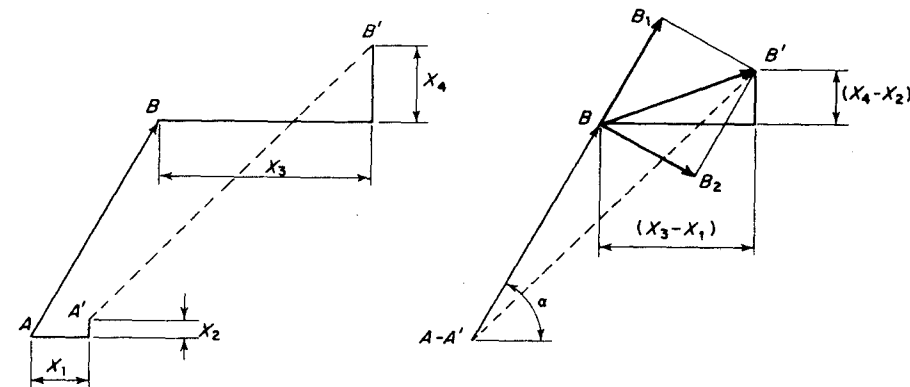
di mana E = modulus elastik, A = luas penampang batang dan L_0 = panjang batang asli.

Besarnya gaya-gaya titik simpul P_1 , P_2 dan P_3 dapat dihitung dari besarnya gaya-gaya aksial F_1 , F_2 , dan F_3 melalui dua cara, yaitu dengan mempergunakan titik-titik simpul B' dan C' sebagai bagian lepas atau dengan mempergunakan titik-titik simpul asli B dan C . Cara pendekatan pertama tentu saja merupakan cara yang lebih tepat, namun cara kedua juga dapat memberikan hasil yang baik pada tingkat-tingkat pembebanan normal, dan selanjutnya akan dipakai pada pembahasan-pembahasan dalam buku ini. Pada kenyataannya, dalam cara yang tepat yang disebut *analisis tingkat-kedua*, gaya-gaya F_1 - F_2 - F_3 dan perpindahan X_1 - X_2 - X_3 adalah sangat saling mempengaruhi sehingga suatu penyelesaian yang langsung merupakan suatu hal yang sebenarnya tidak mungkin.

Setelah semua komponen reaksi penyangga dan gaya-gaya dalam didapatkan, dengan suatu *analisis tingkat-pertama*, selanjutnya akan dihitung lendutan-lendutan dari suatu rangka statik tertentu dengan memakai persamaan perpindahan titik simpul. Persamaan perpindahan titik simpul dalam bentuk umum adalah dari Persamaan (3.5.2). Dengan memperhatikan Gambar 3.13 bentuk ini menjadi

$$(3.5.4) \quad e = (X_3 - X_1) \cos \alpha + (X_4 - X_2) \sin \alpha$$

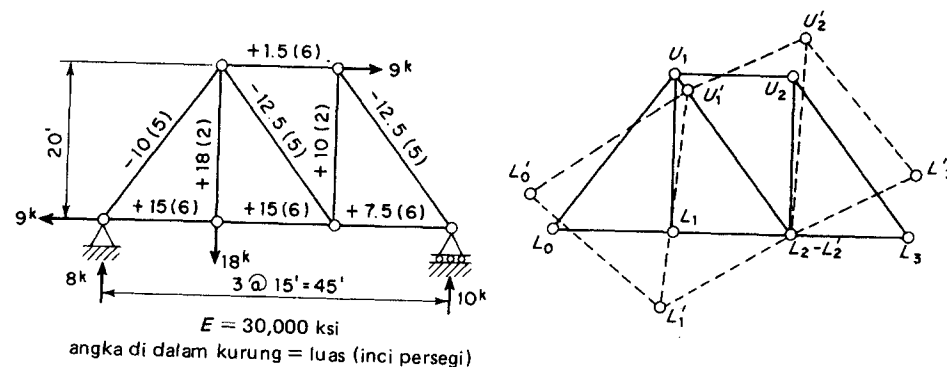
Harap di sini menyatakan perpanjangan dalam satuan ukuran panjang dalam inci atau feet.



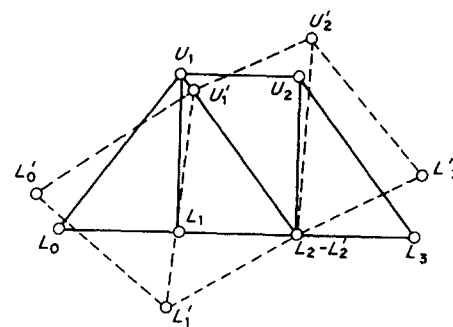
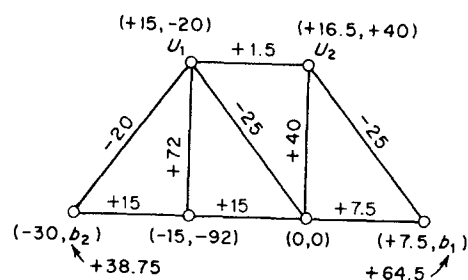
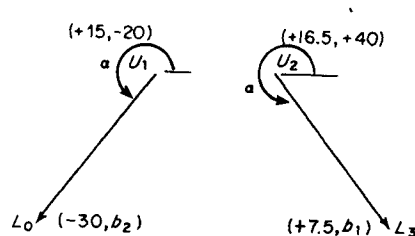
GAMBAR 3.13. Perpanjangan (elongation) dinyatakan dalam Perpindahan Titik Simpul.

Ambil sebagai contoh gaya-gaya dan perpanjangan untuk rangka pada Contoh Soal 3.1 seperti terlihat dalam Gambar 3.14a dan c. Bentuk dari rangka yang berubah bentuk L'_0 - L'_1 - L'_2 - L'_3 - U'_1 - U'_2 ditentukan oleh perpanjangan batang-batang rangka tersebut dan perubahan bentuk ini selanjutnya harus disuperposisikan di atas bentuk rangka aslinya dengan menempatkan L'_0 diatas L_0 dan L'_4 pada ketinggian yang sama dengan L_4 yaitu masing-masing dengan penyangga sendi dan penyangga rol. Walaupun demikian, akan lebih mudah apabila pada permulaan diambil L'_2 pada titik L_2 , dan batang L'_2 - U'_1 diletakkan berimpit dengan batang L_2 - U_1 , seperti terlihat dalam Gambar 3.14b. Dengan cara ini, L_2 dan $L_2 U_1$ masing-masing disebut *titik rujukan* dan *batang rujukan*.

Perpindahan horizontal dan vertikal dari semua titik simpul dalam kedudukan rujukan yang terlihat pada Gambar 3.14c sebagian didapatkan dengan cara pemeriksaan dan sebagian lagi dengan menggunakan persamaan perpindahan titik simpul (3.5.4). Karena $U_1 L_2$ memendek sebesar 25 satuan, maka titik U_1 harus bergeser sebesar 25 satuan ke arah L_2 , yang berarti 1,5 satuan ke arah sebelah kanan dan 20 satuan ke arah sebelah bawah. Titik U_2 harus bergeser 15 satuan lebih ke sebelah kanan daripada titik U_1 , atau 16,5 satuan ke arah sebelah kanan; selain itu juga harus bergeser ke atas 40 satuan lebih daripada titik L_2 . Titik L_3 bergeser 7,5 satuan ke arah sebelah kanan untuk menyesuaikan perpanjangan sebesar 7,5 satuan dalam batang $L_2 L_3$ akan tetapi perpindahan ke arah vertikalnya sebesar b_1 masih belum dapat ditentukan. Titik L_1 bergeser 15 satuan ke arah sebelah kiri dan 92

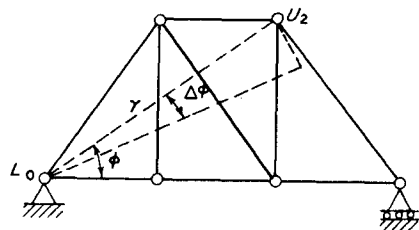


(a) Data yang diketahui

(b) Titik rujukan: L_2
Batang rujukan: L_2U_1 (c) Perpanjangan dan perpindahan titik simpul (dalam 10^{-3} inci)(d) Sudut α pada persamaan perpindahan titik simpul

$$\begin{array}{rcl} +15 & -20 & \\ +30 & -38.75 & \\ +103/9 & -25.75/3 & \\ \hline 508/9 & -202/3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} +16.5 & +40 & \\ +30 & -38.75 & \\ +103/9 & -51.50/3 & \\ \hline +521.5/9 & -47.75/3 & \end{array}$$



(e) Perpindahan titik simpul akibat perpanjangan, translasi, dan perputaran

GAMBAR 3.14. Lendutan (defleksi) Rangka dengan memakai Persamaan Perpindahan Titik Simpul.

satuan ke arah sebelah bawah untuk memberi tempat perpanjangan 15 satuan dalam batang L_1L_2 dan 72 satuan dalam batang U_1L_1 . Titik L_0 harus bergeser sejumlah perpanjangan dalam batang L_0L_1 dan L_1L_2 , atau 30 satuan, ke sebelah kiri; akan tetapi perpindahan ke arah vertikalnya sebesar b_2 belum diketahui.

Persamaan perpindahan titik digunakan terhadap batang-batang U_2L_3 dan U_1L_0 secara berurutan, untuk mendapatkan harga b_1 dan b_2 . Untuk batang U_2L_3 (Gambar 3.14d),

$$-25 = (+7.5 - 16.5)(+0.6) + (b_1 - 40)(-0.8)$$

$$b_1 = +64.5 \text{ satuan}$$

Untuk batang U_1L_0 (Gambar 3.14d),

$$-20 = (-30 - 15)(-0.6) + (b_2 + 20)(-0.8)$$

$$b_2 = +38.75 \text{ satuan}$$

Rangka yang telah berubah bentuk sekarang berada pada kedudukan rujukan seperti pada Gambar 3.14b atau 3.14c harus digeser sebagai sebuah rangka kaku melalui suatu translasi 30 satuan ke sebelah kanan dan 38,75 satuan ke sebelah bawah sehingga titik L'_0 jatuh berimpit pada L_0 , dilanjutkan dengan suatu perputaran searah jarum jam melalui pusat putaran L_0 atau L'_0 untuk menurunkan L'_3 (sekarang pada $64,50 - 38,75 = 25,75$ satuan di atas L_3) ke bawah sehingga ketinggiannya menjadi sama dengan ketinggian L_3 . Perpindahan titik-titik simpul akibat perpanjangan, translasi dan perputaran dapat dilihat dalam Gambar 3.14e, bersama-sama dengan hasil-hasil lendutan akhirnya. Perpindahan horizontal dan vertikal dari tiap titik simpul, misalnya U_2 dalam Gambar 3.14e, akibat suatu perputaran $\Delta\phi$ dengan L_0 sebagai pusat putaran adalah:

$$\text{Perpindahan horisontal} = U_2 U'_2 \sin \phi = r \Delta\phi \sin \phi$$

$$= (\text{proyeksi horisontal dari } r)(\Delta\phi)$$

$$= (20 \text{ ft}) \left(\frac{25.75 \text{ satuan}}{45 \text{ ft}} \right) = \frac{103}{9} \text{ satuan}$$

$$\text{Perpindahan vertikal} = U_2 U'_2 \cos \phi = r \Delta\phi \cos \phi$$

$$= (\text{proyeksi vertikal dari } r)(\Delta\phi)$$

$$= (30 \text{ ft}) \left(\frac{25.75 \text{ satuan}}{45 \text{ ft}} \right) = \frac{51.50}{3} \text{ satuan}$$

Perpindahan dari titik-titik simpul lainnya dapat ditentukan dengan cara yang sama.

Penggunaan persamaan perpindahan titik simpul untuk menentukan lendutan dari rangka yang telah diperlihatkan di sini bukanlah semata-mata untuk mendukung cara itu sendiri melainkan untuk menjelaskan arti fisik dari lendutan-lendutan rangka tersebut.

LATIHAN 3.8

Selesaikan contoh soal dalam pasal di muka dengan menggunakan U_1 sebagai titik rujukan dan $U_1 L_1$ sebagai batang rujukan.

LATIHAN 3.9

Selesaikan contoh soal dalam pasal di muka dengan menggunakan L_0 sebagai titik rujukan dan $L_0 U_1$ sebagai batang rujukan.

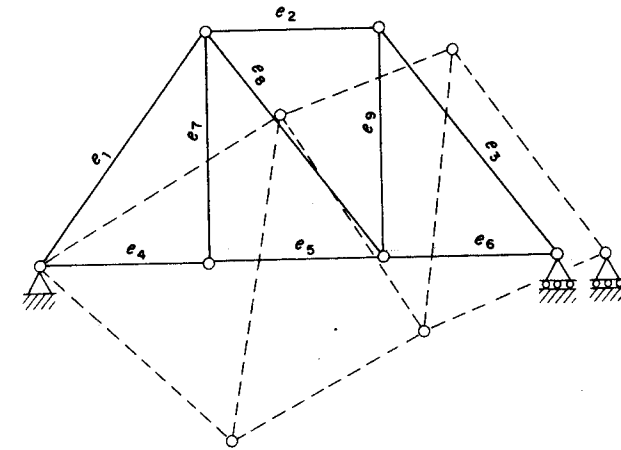
3.6 Lendutan dengan Cara Beban-Satuan yang Konvensional (Deflections by Conventional Unit-Load Method)

Cara beban satuan konvensional dapat dipakai untuk mencari perpindahan sebuah titik simpul yang tertentu dan dalam arah yang tertentu pula. Cara ini diturunkan dari prinsip kerja virtual yang akan dijelaskan berikut ini.

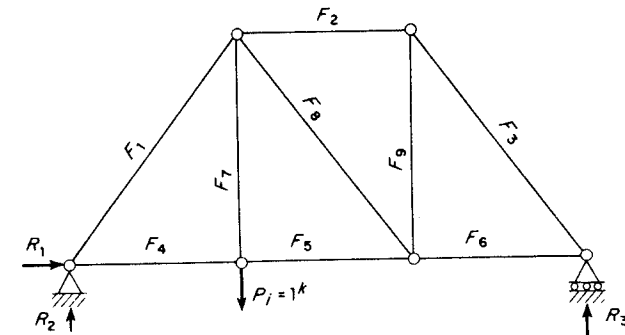
Sebagai akibat dari adanya himpunan perpanjangan batang e_1 sampai dengan e_9 , suatu rangka akan berubah bentuk menjadi seperti yang dinyatakan dengan kedudukan garis terputus-putus secara relatif terhadap rangka asli dalam Gambar 3.15a, dan menimbulkan himpunan pergeseran titik simpul X_1 sampai dengan X_9 . Himpunan dari perpanjangan batang ini disebut sepadan dengan himpunan perpindahan titik simpul; dan keadaan dalam Gambar 3.15a disebut suatu *keadaan sepadan* (compatible state). Perlu diperhatikan bahwa perpanjangan dari batang dapat disebabkan oleh bekerjanya beban, perubahan suhu, atau toleransi dalam pembuatannya.

Dengan menggunakan analisa tingkat-pertama yang didasarkan pada bentuk asli dari rangka, himpunan gaya-gaya batang F_1 sampai dengan F_9 dapat diperoleh akibat bekerjanya sebuah gaya eksternal, misalnya gaya $P_i = 1$ kip dalam Gambar 3.15b. Keadaan dalam Gambar 3.15b ini disebut sebagai suatu *keadaan setimbang* (equilibrium state), di mana diagram bagian-besap untuk keenam titik simpulnya diperlihatkan dalam Gambar 3.15c.

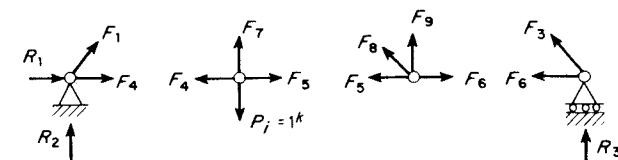
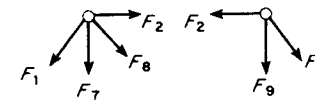
Kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya yang bekerja pada tiap titik simpul dalam Gambar 3.15c, untuk menghasilkan lendutan dari titik simpul yang bersangkutan dalam Gambar 3.15a, harus sama dengan nol, karena resultante gaya-gaya yang bekerja pada setiap titik simpul adalah sama dengan nol.



(a) Keadaan sepadan



(b) Keadaan setimbang



(c) Diagram bagian-besap dari titik-titik simpul

GAMBAR 3.15. Contoh Prinsip Kerja Virtual.

Jumlah kerja keseluruhan yang didapatkan dengan menjumlahkan kerja "virtual" semacam ini dari seluruh keenam titik simpul adalah tetap sama dengan nol; atau

$$(3.6.1) \quad W = (\text{kerja yang dilakukan oleh } R_1, R_2, \text{ dan } R_3) + (\text{kerja yang dilakukan oleh } P_i = 1 \text{ kip}) + (\text{kerja yang dilakukan oleh 9 pasang gaya-gaya batang } F_1 \text{ sampai dengan } F_9) = 0$$

Kerja yang dilakukan oleh R_1 , R_2 dan R_3 sama dengan nol karena tidak terdapat perpindahan dalam arah-arrah R . Kerja yang dilakukan oleh $P_i = 1$ kip adalah $(+P_i X_i)$, di mana arah positif dari X_i diambil apabila arah X_i sama dengan arah P_i . Kerja yang dilakukan oleh pasangan gaya-gaya F_1 sampai dengan F_9 sama dengan $(-\Sigma Fe)$, karena kedua gaya internal pasangan yang sama saling berhadapan satu sama lain (untuk tarik) dalam Gambar 3.15c, dan perpindahan relatif antara titik-titik kerja gaya tersebut saling menjauhi satu sama lain (untuk perpanjangan) dalam Gambar 3.15a. Dengan mensubstitusikan ungkapan-ungkapan untuk kerja virtual ini ke dalam Persamaan (3.6.1), didapat

$$W = 0 + P_i X_i - \Sigma Fe = 0$$

dan dari persamaan ini diperoleh

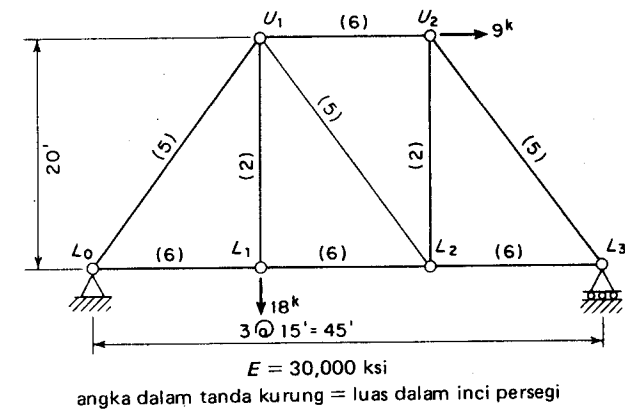
$$(3.6.2) \quad P_i X_i = \Sigma Fe$$

Persamaan (3.6.2) dalam bentuk umumnya adalah $\Sigma P_i X_i = \Sigma Fe$ (untuk beberapa gaya P_i) merupakan Prinsip Kerja Virtual, yang menyatakan bahwa: "kerja eksternal dan kerja internal, yang masing-masing dilakukan oleh gaya-gaya pada keadaan setimbang dalam mencapai perubahan bentuk dari suatu keadaan sepadan, harus sama besar."

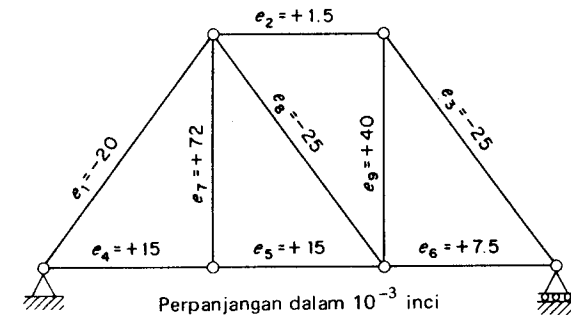
Jika hanya terdapat satu beban satuan dalam keadaan setimbang, maka perpindahan dalam arah beban satuan tersebut pada keadaan sepadan dapat dicari dari Persamaan (3.6.2); oleh karenanya cara ini disebut sebagai cara beban-satuan.

Contoh Soal 3.4. Untuk perpanjangan batang seperti yang terlihat dalam Gambar 3.16b, carilah perpindahan vertikal dari titik simpul U_2 dengan menggunakan cara beban-satuan. Bandingkan hasilnya dengan hasil yang diperoleh dalam Gambar 3.14.

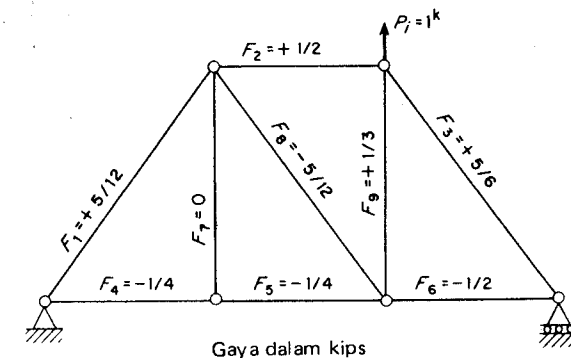
Penyelesaian. Dengan menggunakan Gambar 3.16b sebagai keadaan sepadan dan Gambar 3.16c sebagai keadaan setimbang, dan menggunakan



(a) Data yang diketahui



(b) Keadaan sepadan



(c) Keadaan setimbang

GAMBAR 3.16. Lendutan pada Rangka dengan Cara Beban-Satuan.

rumus beban-satuan,

$$\begin{aligned} P_i X_i &= \Sigma F e = \left(+\frac{5}{12}\right)(-20) + \left(+\frac{1}{2}\right)(+1.5) + \left(+\frac{5}{6}\right)(-25) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)(+15) + \left(-\frac{1}{4}\right)(+15) + \left(-\frac{1}{2}\right)(+7.5) \\ &\quad + (0)(+72) + \left(-\frac{5}{12}\right)(-25) + \left(+\frac{1}{3}\right)(+40) \\ &= -\frac{47.75}{3} \text{ satuan} = -\frac{47.75}{3} \times 10^{-3} \text{ in.} \end{aligned}$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa perpindahan yang terjadi adalah berlawanan arah dengan arah beban satuannya; atau dalam hal ini, bergeser vertikal ke bawah.

LATIHAN 3.10

Untuk perpanjangan batang seperti yang terlihat dalam Gambar 3.16b, carilah perpindahan horisontal dari titik U_2 dan perpindahan vertikal dari titik L_1 dengan menggunakan cara beban-satuan.

3.7 Lendutan dengan Cara Beban-satuan Matriks

Telah diuraikan dalam Pasal 3.3 di muka bahwa matriks statika $[A]$ dari suatu rangka menyatakan gaya-gaya eksternal titik simpul sebagai fungsi dari gaya-gaya aksial dalam batang; atau

$$\{P\}_{NP \times 1} = [A]_{NP \times NF} \{F\}_{NF \times 1}$$

Dalam hal bahwa rangka adalah statik tertentu, $[A]$ adalah matriks bujur-sangkar, sehingga

$$\{F\}_{NF \times 1} = [A^{-1}]_{NF \times NP} \{P\}_{NP \times 1}$$

Sampai di sini, maka akan sangat berguna apabila dijelaskan bahwa sebuah matriks empat persegi adalah merupakan *transposisi* dari matriks empat persegi lainnya, jika baris ke- i dari matriks yang satu menjadi kolom ke- i dari matriks yang lain. Misalnya, jika

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

maka,

$$[A] = [B^T] \quad \text{atau} \quad [B] = [A^T]$$

Jadi transposisi dari sebuah matriks bujur-sangkar adalah sebuah matriks bujur-sangkar lagi.

Dapat dibuktikan bahwa untuk suatu rangka statik tertentu, perpindahan dalam arah dari semua gaya titik simpul eksternal yang mungkin, dapat diperoleh dari persamaan matriks

$$(3.7.1) \quad \{X\}_{NP \times 1} = [A^{-1}]_{NP \times NF}^T \{e\}_{NF \times 1}$$

di mana kolom matriks $\{e\}$ terdiri dari seperangkat harga perpanjangan batang sembarang untuk mana perpindahan-perpindahan titik simpul $\{X\}$ adalah yang dicari.

Cara-cara umum untuk membuktikan Persamaan (3.7.1) untuk sementara akan ditunda dahulu sampai Bab berikutnya; dalam bab ini adalah cukup untuk membenarkan persamaan ini melalui Persamaan (3.6.2). Karena Persamaan (3.6.2) merupakan rumus dasar untuk cara konvensional beban-satuan, maka Persamaan (3.7.1) menyatakan cara matriks beban-satuan.

Persamaan (3.6.2) menyatakan bahwa

$$(3.7.2) \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{NP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j=NF} (F_{j-1} e_j) \\ \sum_{j=1}^{j=NF} (F_{j-2} e_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{j=NF} (F_{j-NP} e_j) \end{bmatrix}$$

di mana $F_{j-1}, F_{j-2}, \dots, F_{j-NP}$ adalah gaya-gaya dalam batang ke- j akibat sebuah beban-satuan yang bekerja dalam arah kesatu, kedua, \dots ke- NP . Karena kolom-kolom dari matriks $[A^{-1}]$ menunjukkan gaya-gaya batang akibat tiap satuan gaya titik simpul, maka harga $F_{j-1}, F_{j-2}, \dots, F_{j-NP}$ didapatkan dalam baris ke- j dari matriks $[A^{-1}]$. Persamaan (3.7.2) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 X_1 &= A^{-1}(1, 1) * e(1) + A^{-1}(2, 1) * e(2) + \cdots + A^{-1}(NF, 1) * e(NF) \\
 X_2 &= A^{-1}(1, 2) * e(1) + A^{-1}(2, 2) * e(2) + \cdots + A^{-1}(NF, 2) * e(NF) \\
 &\vdots \\
 X_{NP} &= A^{-1}(1, NP) * e(1) + A^{-1}(2, NP) * e(2) + \cdots + A^{-1}(NF, NP) * e(NF)
 \end{aligned}
 \quad (3.7.3)$$

Dalam bentuk matriks yang panjang, Persamaan (3.7.3) adalah

$$(3.7.4) \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{NP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}(1, 1) & A^{-1}(2, 1) & \cdots & A^{-1}(NF, 1) \\ A^{-1}(1, 2) & A^{-1}(2, 2) & \cdots & A^{-1}(NF, 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{-1}(1, NP) & A^{-1}(2, NP) & \cdots & A^{-1}(NF, NP) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(NF) \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk matriks yang ringkas (compact), Persamaan (3.7.4) adalah

$$\{X\}_{NP \times 1} = [A^{-1}]_{NP \times NF}^T \{e\}_{NF \times 1}$$

yang tidak lain adalah Persamaan (3.7.1).

Contoh Soal 3.5. Pada rangka statik tertentu dalam Gambar 3.14, carilah seperangkat perpindahan titik simpulnya akibat adanya seperangkat perpanjangan batang dengan memakai cara matriks beban-satuan. Periksa hasilnya dengan hasil yang diperoleh dalam Gambar 3.14.

Penyelesaian. Matriks $[A^{-1}]$ harus dihitung dengan menginversikan matriks $[A]$ dengan menggunakan komputer elektronik, meskipun disarankan di sini bahwa bagi para mahasiswa agar menghitungnya secara langsung dengan cara konvensional—cara titik simpul—sehubungan dengan arti fisiknya. Untuk soal ini sudah dihitung dalam Contoh Soal 3.3. Matriks $\{e\}$ dapat diambil dari Gambar 3.14c. (lihat halaman 55). Selanjutnya dari Persamaan (3.7.1), didapat

$$\{X\} = [A^{-1}]^T \{e\}$$

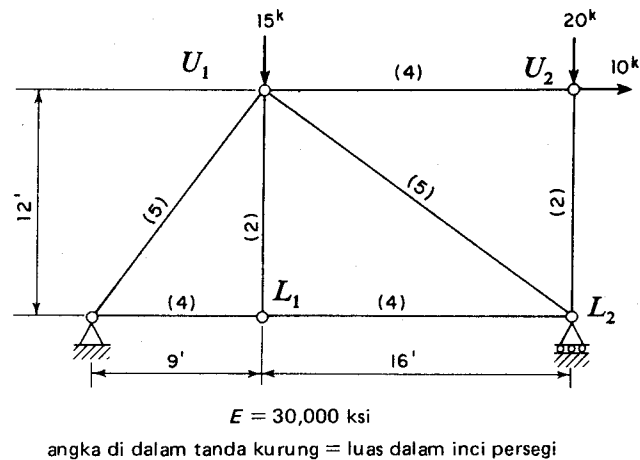
LATIHAN 3.11

Hitunglah perpindahan horizontal dan vertikal dari semua titik simpul pada rangka dalam Gambar 3.17, pertama-tama dengan menggunakan secara berurutan persamaan perpindahan titik simpul, dan kemudian dengan cara beban satuan matriks. Dalam menggunakan cara beban-satuan matriks,

$$= \begin{bmatrix} +\frac{5}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{9} & +\frac{4}{9} \\ +\frac{5}{6} & +\frac{1}{4} & +\frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & +\frac{5}{12} & -\frac{1}{3} \\ +\frac{5}{9} & +\frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & +\frac{2}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{9} & +\frac{4}{9} \\ +\frac{5}{12} & +\frac{1}{2} & +\frac{5}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{12} & +\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{5}{6} & +\frac{1}{4} & +\frac{5}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -1 & +\frac{5}{12} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{5}{12} & +\frac{1}{2} & +\frac{5}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{12} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -20 \\ +1.5 \\ -25 \\ +15 \\ +15 \\ +7.5 \\ +72 \\ -25 \\ +40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +\frac{508}{9} \\ -\frac{202}{3} \\ +\frac{521.5}{9} \\ -\frac{47.75}{3} \\ +15 \\ -\frac{418}{3} \\ +30 \\ -\frac{167.75}{3} \\ +37.5 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ in.}$$

carilah matriks statik dan inversnya masing-masing secara sendiri-sendiri, dan periksa kebenarannya dengan menggunakan persamaan $[A][A^{-1}] = [I]$. Tentukan juga perpindahan horisontal dari titik simpul U_2 dan perpindahan dalam vertikal dari titik simpul L_1 dengan memakai cara beban-satuan konvensional.



GAMBAR 3.17. Latihan 3.11.

3.8 Catatan Penutup

Rangka statik tertentu telah dipilih dari sekian banyak tipe struktur kerangka, dan digarap secara tersendiri dalam bab ini bukan semata-mata untuk menunjukkan pentingnya hal tersebut, akan tetapi juga karena kesederhanaannya dalam memberikan gambaran tentang konsep-konsep dasar. Konsep-konsep ini meliputi: 1) bahwa matriks statik bujur-sangkâ dari suatu struktur statik tertentu yang labil secara statik adalah matriks tunggal; 2) bahwa cara matriks dari titik-titik simpul dalam kenyataannya pada penyelesaian suatu sistem persamaan linear simultan, jumlahnya sama dengan jumlah gaya-gaya titik simpul yang mungkin (belakangan disebut derajat kebebasan dalam Bab 4); 3) bahwa pencarian titik simpul (atau bagian/potongan) dengan dua (atau tiga) yang tidak diketahui, adalah merupakan hal yang pokok pada cara konvensional dari titik-titik simpul (atau bagian-bagian/potongan-potongan); 4) bahwa cara grafik dari titik-titik simpul pernah menjadi populer pada waktu yang lampau, akan tetapi cara ini disajikan di sini sekedar untuk menunjukkan kebaikannya sendiri; 5) bahwa persamaan perpindahan titik simpul dipakai untuk memberikan penekanan pada len-

dutan rangka konstruksi secara fisik dalam analisis tingkat-pertama; dan 6) bahwa Prinsip dari Kerja Virtual dipakai untuk menurunkan cara konvensional dan cara beban satuan matriks untuk mencari lendutan-lendutan dari rangka.

Soal-soal latihan yang disarankan telah dibuat sedemikian rupa agar dapat sesuai dengan tuntutan waktu para mahasiswa yang sesingkat mungkin. Jika memungkinkan, para dosen dan mahasiswa dianjurkan juga untuk membuat sketsa rangka-rangka sederhana dan mengikuti langkah-langkah yang digariskan dalam soal Latihan 3.11.

4.1 Derajat Kebebasan

Suatu struktur kerangka, secara khas terdiri dari bagian-bagian konstruksi (batang, tiang, dan balok) yang dihubungkan satu sama lain pada titik-titik simpul. Sebuah *rangka* adalah sebuah struktur kerangka di mana beban-beban hanya bekerja pada sendi tanpa gesekan, yang menghubungkan batang-batang lurus dengan penampang yang seragam. Dalam bab yang terdahulu, simbol *NP* telah dipakai untuk menyatakan jumlah arah-arrah di mana gaya-gaya mungkin diterapkan pada simpul-simpul. Perlu dicatat di sini bahwa *NP* adalah juga merupakan jumlah perpindahan-perpindahan titik simpul yang tidak diketahui; sebenarnya terdapat hubungan satu lawan satu antara gaya-gaya titik simpul dan perpindahan-perpindahan.

Karena perpindahan-perpindahan titik simpul menggambarkan cara-cara di mana suatu struktur kerangka dapat *dengan leluasa* menanggapi setiap adanya gangguan eksternal, maka jumlah perpindahan-perpindahan titik simpul yang tidak diketahui (atau arah-arrah yang mungkin dari titik-titik simpul) untuk selanjutnya disebut derajat kebebasan *NP*.

4.2 Ketidaktertentuan Eksternal dibanding Ketidaktertentuan Internal

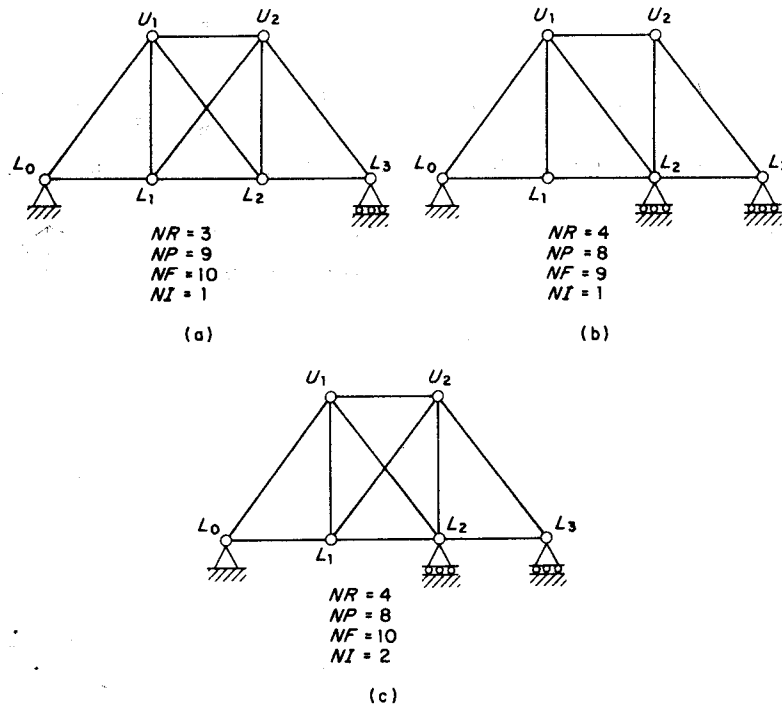
Satuan rangka dapat berupa statik tertentu atau tidak-tertentu asalkan rangka tersebut stabil secara statik. Syarat yang diperlukan untuk ketertentuan

adalah bahwa matriks statika $[A]$, menyatakan gaya-gaya titik simpul dinyatakan dalam gaya-gaya aksial dalam batang-batang, merupakan sebuah matriks bujur-sangkar. Jadi, derajat ketidaktertentuan NI dapat dinyatakan

$$(4.2.1) \quad NI = NF - NP$$

di mana NF adalah jumlah batang-batang dalam rangka, dan NP adalah derajat kebebasan.

Sebuah rangka harus memiliki paling sedikit tiga komponen-komponen reaksi penyangga yang bebas untuk mempertahankan kesetimbangan eksternal; misalnya bahwa suatu rangka pada umumnya mempunyai sebuah penyangga sendi dan sebuah penyangga nol. Menurut lazimnya, bilamana sebuah rangka dengan tiga komponen reaksi penyangga mempunyai batang-batang yang lebih banyak daripada derajat kebebasannya, maka rangka ini disebut rangka statik tidak-tertentu internal (lihat Gambar 4.1a), akan tetapi jika derajat ketidaktertentuannya sama dengan $(NR - 3)$, maka rangka ini disebut rangka statik tidak-tertentu eksternal (lihat Gambar 4.1b). Lebih lanjut apabila derajat ketidaktertentuan lebih besar dari $(NR - 3)$, maka



GAMBAR 4.1. *Ketidaktertentuan Eksternal dan Internal.

rangka ini dianggap sebagai tidak-tertentu eksternal dan internal (lihat Gambar 4.1c). Kelaziman ini, walaupun demikian tidak perlu dipegang sebagai aturan yang keras dan teguh karena rangka dalam Gambar 4.1b dapat dianggap mempunyai satu batang kelebihan (misalnya, $U_1 U_2$) untuk statik tertentu, dan rangka pada Gambar 4.1c, mempunyai dua batang kelebihan (misalnya, $U_1 U_2$ dan $L_1 U_2$). Oleh sebab itu, semua rangka statik tidak-tertentu dapat dianggap sebagai tidak-tertentu internal.

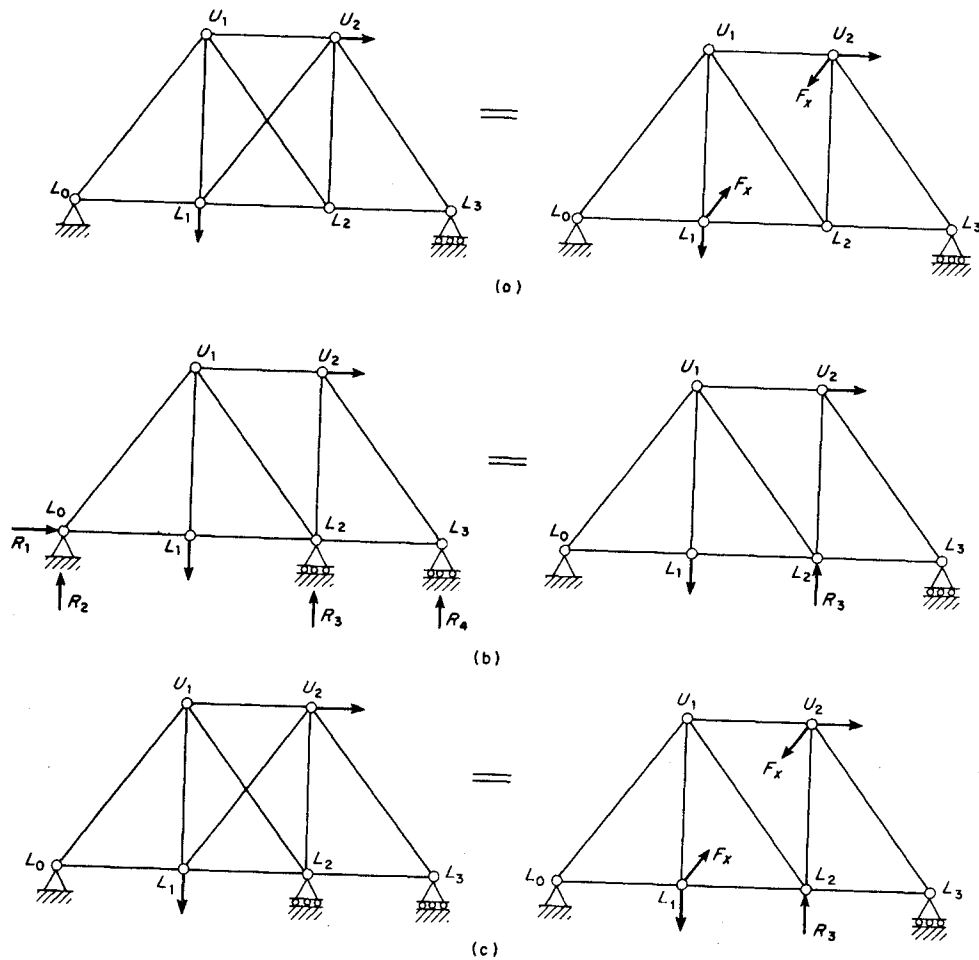
Jika rangka stabil secara statis, maka dapat disimpulkan bahwa Persamaan (4.2.1) adalah yang terbaik untuk memastikan derajat ketidaktertentuan. Demikian juga sebuah rangka statik tidak-tertentu dapat dikembalikan menjadi statik tertentu dengan cara menghapuskan batang-batang hanya jika jumlah komponen-komponen reaksi penyangga sama dengan tiga atau lebih dari tiga.

4.3 Cara Gaya Kelebihan (The Redundant Force Method)

Pada umumnya suatu rangka statik tertentu dapat diturunkan dari sebuah rangka statik tidak-tertentu dengan jalan menghilangkan batang-batang dan/atau reaksi-reaksi yang berlebih dan menggantikan akibat terhadap rangka dengan derajat lebih rendah tersebut dengan gaya-gaya ekuivalen. Gaya-gaya ekuivalen ini tidak diperlukan dalam membuat suatu perencanaan; oleh karenanya gaya-gaya ekuivalen ini disebut sebagai gaya-gaya *kelebihan* (redundants). Dalam Gambar 4.2a, gaya F_x pada batang $L_1 U_2$ dipilih sebagai gaya kelebihan; dalam Gambar 4.2b, reaksi penyangga R_3 ; dan dalam Gambar 4.2c, gaya F_x dalam batang $L_1 U_2$ dan reaksi penyangga R_3 .

Perlu dicatat bahwa biasanya terdapat beberapa cara pemilihan gaya-gaya kelebihan meskipun jumlahnya harus selalu sama dengan derajat ketidaktertentuan. Misalnya, salah satu dari keenam batang sekeliling atau dalam panel tengah dari rangka pada Gambar 4.2a dapat dipilih sebagai kelebihan. Dalam Gambar 4.2b, reaksi penyangga R_4 atau salah satu batang seperti $U_1 U_2$, $L_1 L_2$, $U_1 L_2$, atau $U_2 L_2$ dapat dipilih sebagai gaya kelebihan pengganti R_3 . Dalam Gambar 4.2c, kedua gaya kelebihan dapat dipilih dari dua buah gaya batang, atau sebuah gaya batang dan sebuah reaksi penyangga masing-masing dapat dipilih, asalkan rangka statik tertentu ini stabil secara statis.

Pada *cara gaya kelebihan* ini, semua gaya kelebihan harus dinilai sejak awal dari persyaratan-persyaratan sepadan yaitu sehubungan dengan adanya perpindahan relatif antara ujung-ujung batang kelebihan, atau timbulnya perpindahan dalam arah penyangga kelebihan dari rangka yang bersangkutan. Dalam hal yang pertama, perpindahan relatif harus dibuat sedemikian rupa sehingga perpindahan relatif ini dapat mengimbangi perpanjangan dari

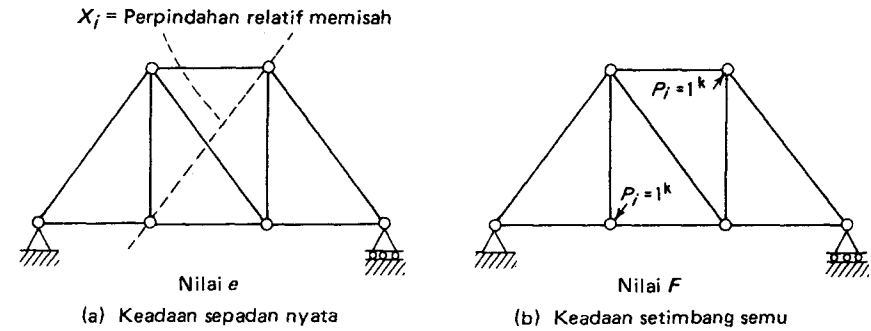


GAMBAR 4.2. Gaya-gaya Kelebihan dalam Rangka-rangka Statik Tidak-Tertentu.

batang kelebihan yang bersangkutan; dan dalam hal yang terakhir, perpindahan titik penyangga harus sama dengan nol di reaksi penyangga kelebihan

Perpindahan relatif X_i (atau penambahan jarak) antara dua titik simpul dari suatu rangka dapat dihitung dengan memakai cara konvensional beban-satuan, asalkan *sepasang* gaya satuan P_i dikerjakan dalam keadaan setimbang seperti terlihat dalam Gambar 4.3. Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (3.6.1) pada Gambar 4.3, didapat

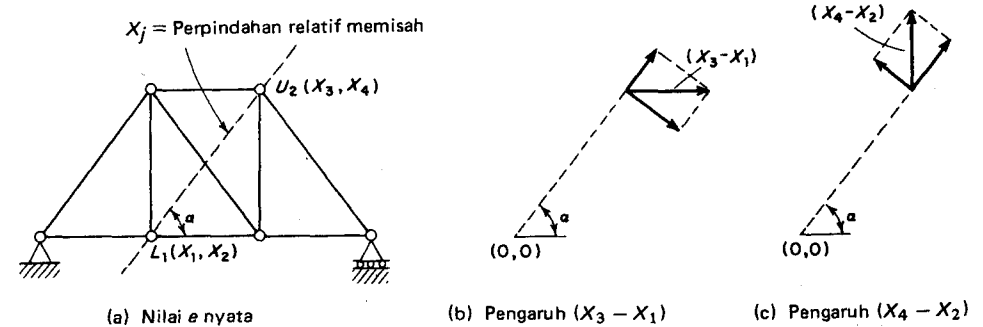
$$(4.3.1) \quad \text{Perpindahan relatif } X_i \text{ (memisah)} = \sum F_e$$



GAMBAR 4.3. Perpindahan Relatif dengan Cara Beban Satuan Konvensional.

Dalam hal di mana semua perpindahan titik-titik simpul dalam kondisi sepadan nyata telah dihitung seperti terlihat dalam Gambar 4.4, maka perpindahan relatif antara dua titik simpul yang khas seperti L_1 dan U_2 menjadi

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} \text{Perpindahan relatif } X_i \text{ (memisah)} \\ = (X_3 - X_1) \cos \alpha + (X_4 - X_2) \sin \alpha \end{aligned}$$



GAMBAR 4.4. Perpindahan Relatif dari Perpindahan Horizontal dan Vertikal.

Persamaan di atas dapat dibuktikan kebenarannya dengan mudah yaitu dengan mengambil komponen-komponen perpindahan relatif horisontal dan vertikal, $(X_3 - X_1)$ dan $(X_4 - X_2)$, dalam arah dari suatu garis khayal yang menghubungkan L_1 dan U_2 .

Dalam menggunakan syarat sepadan, lendutan-lendutan dalam arah-arrah dari gaya kelebihan harus merupakan penjumlahan dari: 1) lendutan yang terjadi akibat pembebanan, dan 2) lendutan akibat tiap gaya kelebihan,

yang dikerjakan pada rangka statik tertentu dengan derajat lebih rendah (rangka setelah penghapusan batang atau reaksi kelebihan). Persyaratan-persyaratan ini menghasilkan suatu sistem persamaan-persamaan linear simultan yang dapat dipergunakan untuk mencari harga-harga gaya kelebihan tersebut. Meskipun dimungkinkan untuk menyatakan persamaan-persamaan simultan ini dalam ungkapan simbolis secara umum, namun dalam buku pengantar ini dianggap cukup memadai untuk menelaah dua buah contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.1. Buatlah analisis dari rangka statik tidak-tertentu pada Gambar 4.5a dengan menggunakan cara gaya kelebihan, yaitu dengan mengambil gaya dalam batang $L_1 U_2$ sebagai kelebihannya. Hitung semua gaya-gaya aksial dan perpindahan titik-titik simpul, dan tunjukkan pula bahwa semua syarat statika dan sepadan dipenuhi.

Penyelesaian. Meskipun penyelesaian seperti yang diberikan dalam Gambar 4.5 bisa disusun dalam suatu daftar (tabel) atau secara otomatis dengan program komputer, tetapi di sini dipakai bagan diagram untuk menjelaskan prosedur tahapan perhitungan. Syarat sepadan menuntut bahwa perpindahan relatif X_i akibat aksi gabungan dari beban-beban kerja dan sepasang gaya kelebihan harus sama dengan perpanjangan dari batang kelebihan yang bersangkutan. Dengan menggunakan cara konvensional beban-satu-an, didapat

X_i (akibat beban-beban kerja) = Σ (F dalam Gambar 4.5d) (e dalam Gambar 4.5c)

$$= (+0.6)(+1.5 + 15) + (+0.8)(+72 + 40) + (-1)(-25)$$

$$= +124.5 \text{ satuan}$$

X_i (akibat pasangan F_x) = Σ (E dalam Gambar 4.5d) (e dalam Gambar 4.5f)

$$= 2(+0.6)(-0.6F_x) + 2(+0.8)(-3.2F_x) + (-1)(+2F_x)$$

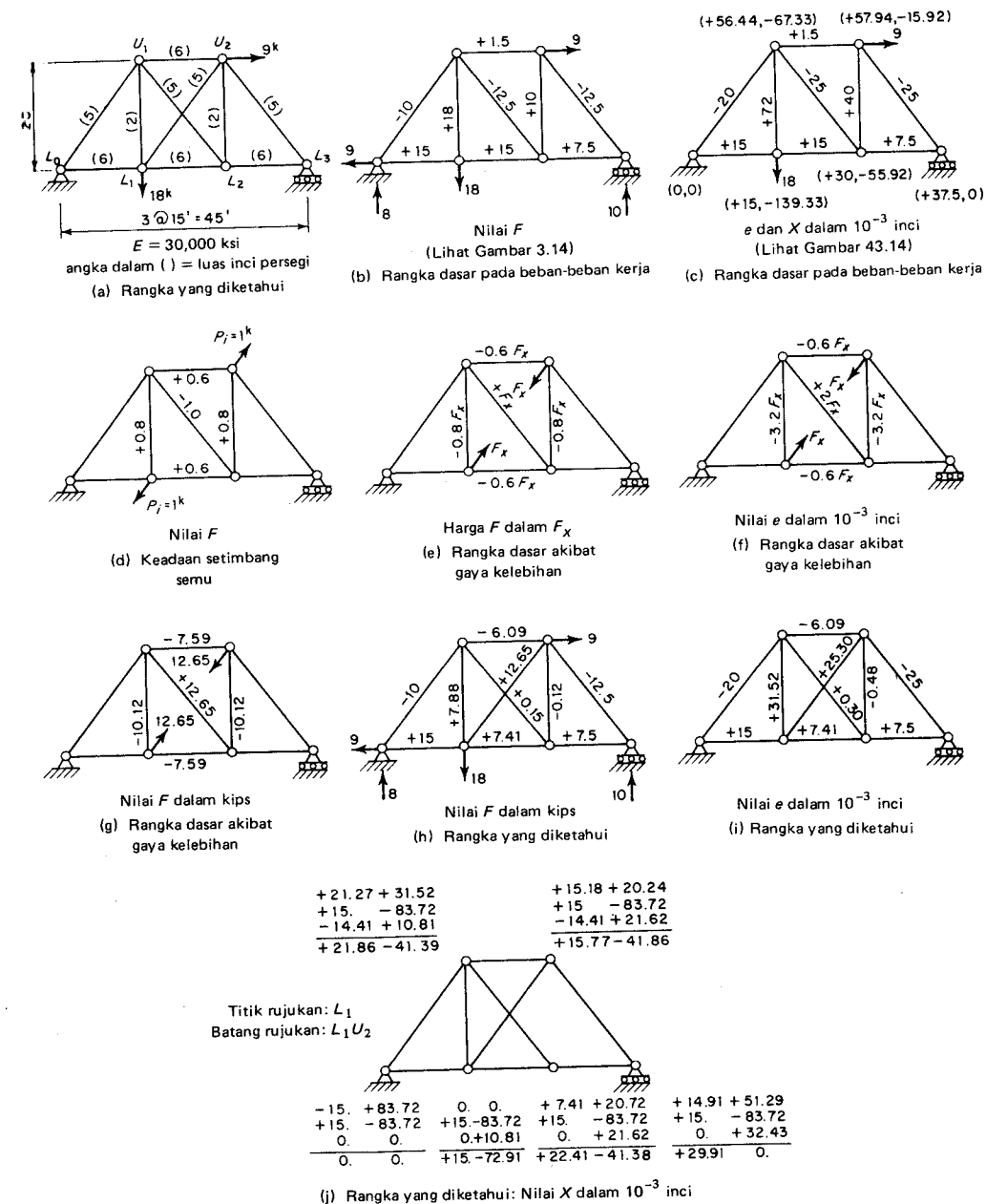
$$= -7.84F_x \text{ satuan}$$

Karena perpindahan-perpindahan titik simpul dapat diperoleh pada Gambar 4.5c, maka perpindahan relatif antara titik-titik simpul L_1 dan U_2 juga dapat dihitung sebagai berikut,

$$X_i \text{ (akibat beban-beban kerja)}$$

$$= (+57.94 - 15)(+0.6) + (-15.92 + 139.33)(+0.8)$$

$$= +124.5 \text{ satuan}$$



GAMBAR 4.5. Cara Gaya Kelebihan (Contoh Soal 4.1).

Perpanjangan batang lebih adalah sama dengan jumlah perpindahan relatif, maka

$$\frac{F_x(300)}{(5)(30)} = +124.5 - 7.84F_x$$

$$F_x = +\frac{124.5}{9.84} = +12.65 \text{ kips}$$

Nilai-nilai akhir dari F dalam rangka yang diketahui pada Gambar 4.5h adalah gabungan dari nilai-nilai F dalam Gambar 4.5b dan 4.5g. Sembilan kali pemeriksaan statika harus dibuat untuk nilai-nilai F dalam Gambar 4.5h, yaitu satu pemeriksaan untuk tiap derajat kebebasan.

Perpindahan titik simpul dari rangka yang diketahui dihitung dalam Gambar 4.5j yaitu dengan memakai persamaan perpindahan titik simpul dengan mengabaikan sebuah batang lain misalnya U_2L_2 . Pemeriksaan kesepadanan didapatkan dari kenyataan bahwa perpindahan vertikal dari titik simpul U_2 dan L_2 dalam Gambar 4.5j adalah konsisten dengan perpanjangan negatif dalam batang U_2L_2 . Jumlah dari pemeriksaan kesepadanan sama dengan satu, yaitu sesuai dengan derajat ketidaktentuan dari rangka yang diketahui.

Contoh Soal 4.2. Buatlah analisis dari rangka statik tidak-tertentu pada Gambar 4.6a dengan cara gaya kelebihan, dan menggunakan reaksi penyangga R_3 pada L_2 sebagai gaya kelebihan. Hitung semua gaya-gaya aksial dan perpindahan-perpindahan titik simpul, dan tunjukkan pula bahwa syarat statik dan sepadan semuanya dipenuhi.

Penyelesaian. Syarat sepadan menuntut bahwa pemindahan vertikal dari titik L_2 akibat gabungan beban-beban kerja dan reaksi penyangga kelebihan R_3 harus sama dengan nol. Dengan menggunakan cara konvensional beban-satuan, didapat

Perpindahan vertikal titik L_2 ke bawah (akibat beban kerja)

$$= \Sigma (F \text{ dalam Gambar 4.6d}) (e \text{ dalam Gambar 4.6c})$$

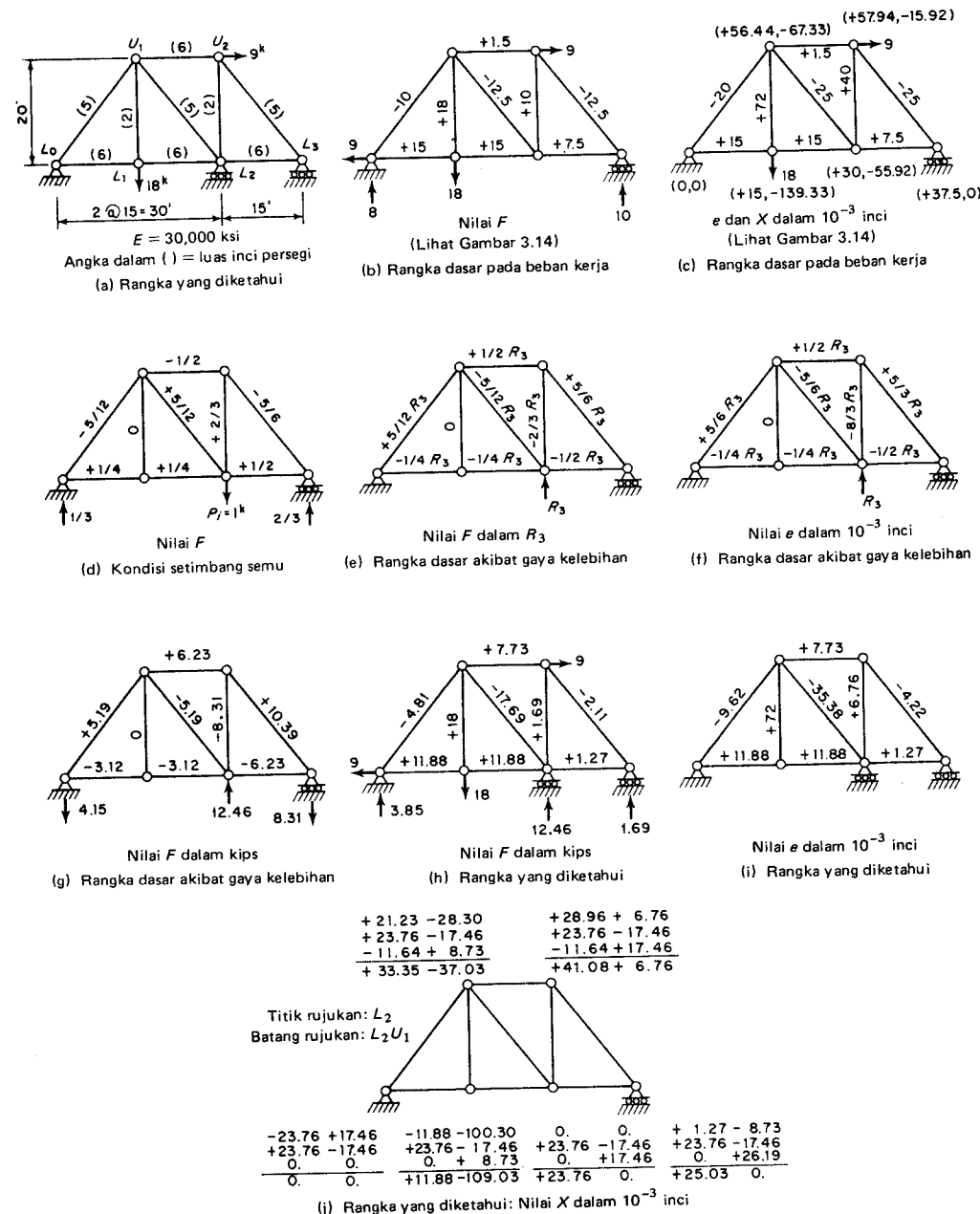
$$= (-\frac{1}{2})(+1.5) + (+\frac{1}{4})(15 + 15) + (+\frac{1}{2})(+7.5) + (-\frac{5}{12})(-20)$$

$$+ (+\frac{5}{12})(-25) + (-\frac{5}{8})(-25) + (+\frac{3}{8})(+40)$$

$$= +55.92 \text{ satuan.}$$

Perpindahan vertikal titik L_2 ke bawah (akibat R_3 ke atas)

$$= \Sigma (F \text{ dalam Gambar 4.6d}) (e \text{ dalam Gambar 4.6f})$$



GAMBAR 4.6. Cara Gaya Kelebihan (Contoh Soal 4.2).

$$\begin{aligned}
 &= -R_3[2(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{4})^2 + 2(\frac{5}{12})(\frac{5}{8}) + (\frac{5}{8})(\frac{5}{8}) + (\frac{5}{8})(\frac{5}{8})] \\
 &= -4.486R_3 \text{ satuan}
 \end{aligned}$$

Perpindahan vertikal pada R_3 adalah sama dengan nol, maka

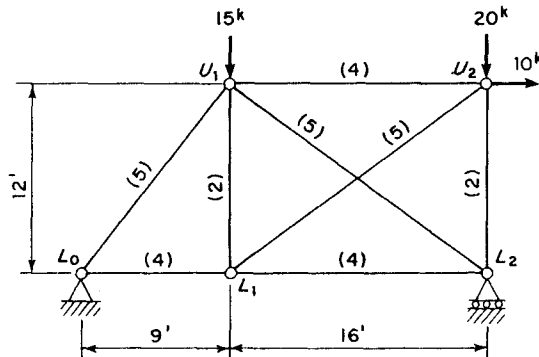
$$\begin{aligned}
 +55.92 - 4.486R_3 &= 0 \\
 R_3 &= +12.46 \text{ kips}
 \end{aligned}$$

Nilai-nilai akhir dari F dalam rangka yang diketahui pada Gambar 4.6f adalah merupakan gabungan dari nilai-nilai F dalam Gambar 4.6b dan 4.6g. Delapan kali pemeriksaan statik harus dibuat untuk nilai-nilai F dalam Gambar 4.6, yaitu satu pemeriksaan untuk tiap derajat kebebasan.

Perpindahan titik-titik simpul dari rangka yang diketahui dihitung dalam Gambar 4.6j dengan memakai persamaan perpindahan titik simpul. Pemeriksaan kesepadanan didapat dari kenyataan bahwa perpindahan vertikal dari titik-titik L_0 , L_2 dan L_3 semuanya sama dengan nol.

LATIHAN 4.1

Buatlah analisis rangka statik tidak-tertentu seperti terlihat dalam Gambar 4.7 dengan cara gaya kelebihan, memakai gaya dalam batang $L_1 U_2$ sebagai gaya kelebihan. Hitunglah semua gaya aksial dan perpindahan titik-titik simpul, serta tunjukkan bahwa persyaratan statik dan persyaratan sepadan semuanya dipenuhi.

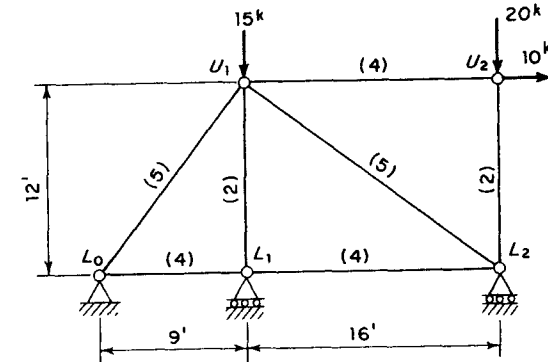


$E = 30,000 \text{ ksi}$
Angka dalam () = luas dalam inci persegi

GAMBAR 4.7. Soal Latihan 4.1.

LATIHAN 4.2

Buatlah analisis rangka statik tidak-tertentu seperti terlihat dalam Gambar 4.8 dengan cara gaya kelebihan, memakai reaksi penyangga R_3 pada titik L_1 sebagai gaya kelebihan. Hitunglah semua gaya aksial dan perpindahan titik-titik simpul, serta tunjukkan bahwa persyaratan statika dan persyaratan sepadan semuanya dipenuhi.



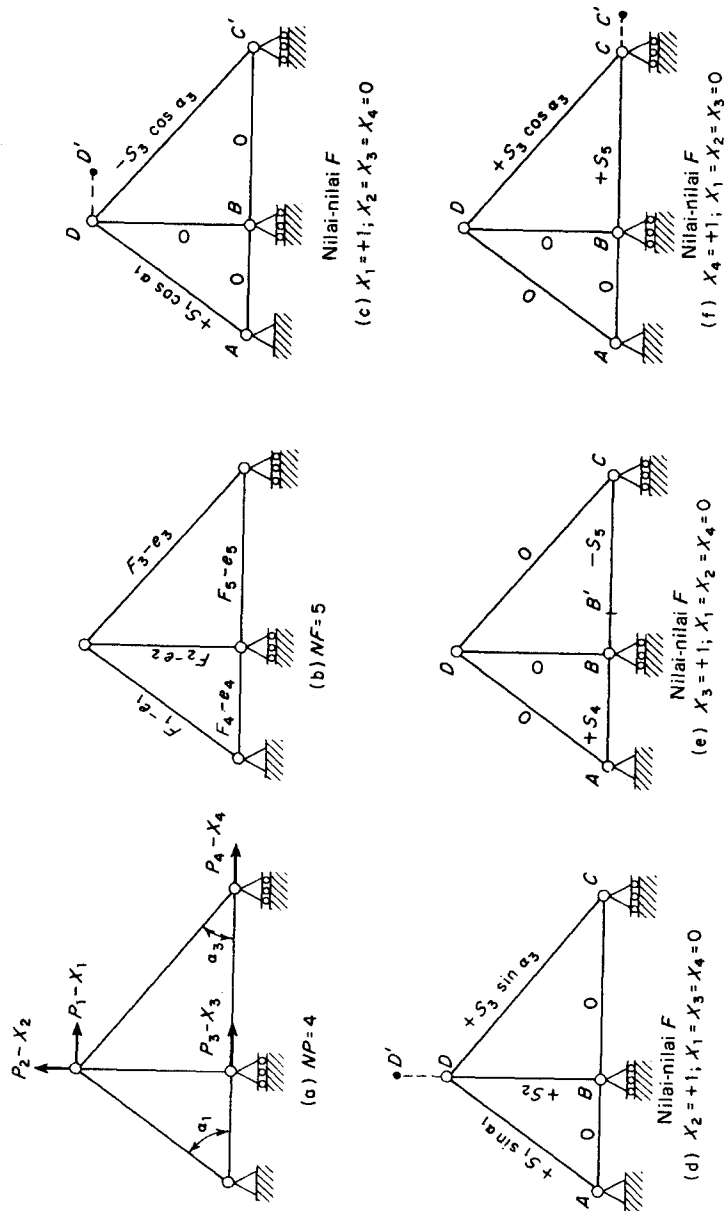
$E = 30,000 \text{ ksi}$
Angka dalam () = luas dalam inci persegi

GAMBAR 4.8. Soal Latihan 4.2.

4.4 Cara Perpindahan-Matriks

Berbeda dengan cara gaya kelebihan yang hanya berlaku untuk struktur statik tidak-tertentu, maka cara perpindahan dapat dipakai baik untuk struktur statik tertentu maupun untuk struktur statik tidak-tertentu. Alasannya adalah bahwa pada cara perpindahan, yang diambil sebagai pokok yang tidak diketahui adalah perpindahan titik-titik simpul dari struktur, dan akan selalu terdapat persamaan-persamaan kesetimbangan dalam arah dari derajat kebebasan, yang sama banyaknya dengan perpindahan titik-titik simpul yang tidak diketahui, tanpa mengindahkan ketidak-tertentuan dari struktur tersebut.

Dalam pemakaian cara perpindahan ini adalah lebih mudah dengan menggunakan matriks untuk menyatakan persamaan-persamaan linear yang terlibat; oleh karenanya cara ini disebut sebagai *cara perpindahan-matriks* (*matrix displacement method*). Ada dua macam matriks penting yang akan dibahas, yaitu: matriks *gaya internal lawan perpindahan titik simpul* $[C]$, dan matriks *gaya eksternal lawan perpindahan titik simpul* $[K]$.



GAMBAR 4.9. Matriks $[C]$ dan $[K]$ pada Cara Perpindahan.

Berikut ini akan dikaji suatu rangka sederhana seperti terlihat dalam Gambar 4.9. Derajat kebebasan $NP =$ empat, dan arah-arah dari gaya-gaya titik simpul yang mungkin P_1 sampai dengan P_4 , serta perpindahan titik-titik simpul yang bersangkutan dan tidak diketahui X_1 sampai dengan X_4 , secara berurutan diberi nomor dalam Gambar 4.9a. Jumlah dari gaya-gaya batang yang tidak diketahui NF sama dengan lima; gaya-gaya batang ini serta perpanjangan-perpanjangan batang yang bersangkutan diberi nama F_1 sampai dengan F_5 dan e_1 sampai dengan e_5 dalam Gambar 4.9b.

Matriks gaya internal dan perpindahan titik simpul $[C]$ menyatakan gaya-gaya batang $F(1)$ sampai dengan $F(NF)$ dalam arti perpindahan titik simpul $X(1)$ sampai dengan $X(NP)$. Untuk rangka pada Gambar 4.9,

$$(4.4.1) \quad [C]_{5 \times 4} =$$

$F \backslash X$	1	2	3	4
1	$+S_1 \cos \alpha_1$	$+S_1 \sin \alpha_1$	0	0
2	0	$+S_2$	0	0
3	$-S_3 \cos \alpha_3$	$+S_3 \sin \alpha_3$	0	$+S_3 \cos \alpha_3$
4	0	0	$+S_4$	0
5	0	0	$-S_5$	$+S_5$

di mana $S_1 = EA_1/L_1$ sampai dengan $S_5 = EA_5/L_5$ adalah gaya-gaya yang memperpanjang batang-batang yang bersangkutan dengan satu satuan dan dengan demikian merupakan ukuran kekakuan dari batang tersebut. Matriks $[C]$ dapat dibentuk dengan kolom-kolom dengan menuliskan gaya dalam batang-batang pada Gambar 4.9c, d, e, dan f. Perlu dicatat bahwa hanya komponen perpindahan titik simpul dalam arah batangnya yang menyebabkan perubahan panjang dari batang tersebut.

Matriks gaya internal lawan perpindahan titik simpul $[C]$ menyatakan gaya-gaya batang $F(1)$ sampai dengan $F(NF)$ dinyatakan dalam perpindahan titik simpul $X(1)$ sampai dengan $X(NP)$. Untuk rangka pada Gambar 4.9,

(4.4.2)

$$[K]_{4 \times 4} = \begin{array}{c|cccc} & \begin{array}{c} X \\ P \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & +S_1 \cos^2 \alpha_1 & +S_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 & 0 & -S_3 \cos^2 \alpha_3 \\ & & +S_3 \cos^2 \alpha_3 & -S_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 & & \\ 2 & & +S_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 & +S_1 \sin^2 \alpha_1 + S_2 & 0 & +S_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 \\ & & -S_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 & +S_3 \sin^2 \alpha_3 & & \\ 3 & & 0 & 0 & +S_4 + S_5 & -S_5 \\ 4 & & -S_3 \cos^2 \alpha_3 & +S_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 & -S_5 & +S_5 + S_3 \cos^2 \alpha_3 \end{array}$$

Sekali lagi matriks $[K]$ dapat dibentuk dengan kolom-kolom dengan menuliskan gaya-gaya eksternal P_1 sampai dengan P_4 yang diperlukan untuk mempertahankan kesetimbangan dari titik-titik simpul dalam Gambar 4.7c, d, e, dan f.

Ada dua langkah penting dalam cara matriks-perpindahan, yaitu pertama penyelesaian $\{X\}$ dari persamaan

$$(4.4.3) \quad \{P\} = [K]\{X\}$$

dan kedua, perhitungan $\{F\}$ dari persamaan

$$(4.4.4) \quad \{F\} = [C]\{X\}$$

Suatu *matriks simetrik* adalah sebuah matriks bujur-sangkar di mana elemen pada (i, j) sama dengan elemen pada (j, i) . Misalnya, matriks

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

adalah simetrik. Dalam pasal selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks K selalu simetrik.

Contoh Soal 4.3. Susunlah matriks $[C]$ dan $[K]$ dari rangka dalam Gambar 4.10. Dengan memakai nilai-nilai numeris dari $\{P\}$, $\{X\}$, dan $\{F\}$

dalam Contoh Soal 4.2, buktikan secara numeris kedua persamaan matriks, $\{P\} = [K]\{X\}$ dan $\{F\} = [C]\{X\}$, dengan menggunakan cara perkalian matriks.

Penyelesaian. Kolom pertama dan kolom kedua dari $[C]$ dan $[K]$ disusun dengan mengamati Gambar 4.10f dan h. Sisa enam kolom yang lain juga ditentukan dengan cara yang sama.

$$\{P\} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline 3 & +9 \\ \hline 4 & 0 \\ \hline 5 & 0 \\ \hline 6 & -18 \\ \hline 7 & 0 \\ \hline 8 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\{F\} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -4.81 \\ \hline 2 & +7.73 \\ \hline 3 & -2.11 \\ \hline 4 & +11.88 \\ \hline 5 & +11.88 \\ \hline 6 & +1.27 \\ \hline 7 & +18.00 \\ \hline 8 & -17.69 \\ \hline 9 & +1.69 \\ \hline \end{array}$$

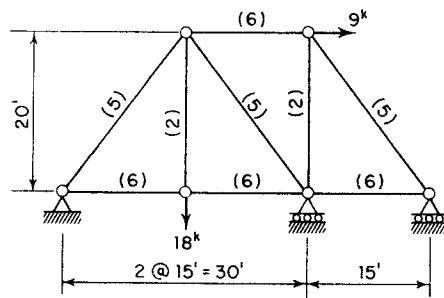
$$\{X\} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & +33.35 \\ \hline 2 & -37.03 \\ \hline 3 & +41.08 \\ \hline 4 & +6.76 \\ \hline 5 & +11.88 \\ \hline 6 & -109.03 \\ \hline 7 & +23.76 \\ \hline 8 & +25.03 \\ \hline \end{array}$$

LATIHAN 4.3

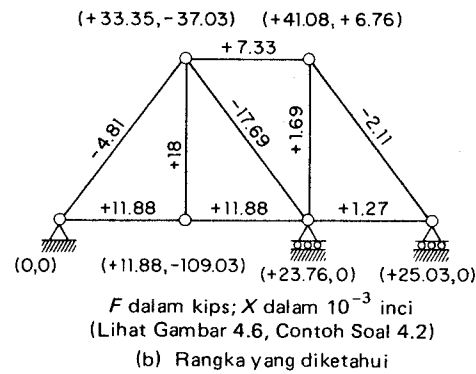
Susunlah matriks $[C]$ dan $[K]$ dari rangka dalam Contoh Soal 4.1. Dengan memakai nilai-nilai numeris dari $\{P\}$, $\{X\}$, dan $\{F\}$ dalam contoh tersebut, buktikan secara numeris persamaan-persamaan $\{P\} = [K]\{X\}$ dan $\{F\} = [C]\{X\}$.

LATIHAN 4.4

Susunlah matriks $[C]$ dan $[K]$ dari rangka dalam Soal Latihan 4.1 (Gambar 4.7). Dengan demikian nilai-nilai numeris dari $\{P\}$, $\{X\}$, dan $\{F\}$ dalam soal latihan tersebut, buktikan secara numeris persamaan $\{P\} = [K]\{X\}$ dan $\{F\} = [C]\{X\}$.



$E = 30,000$ ksi
Angka dalam () = luas dalam inci persegi
(a) Rangka yang diketahui

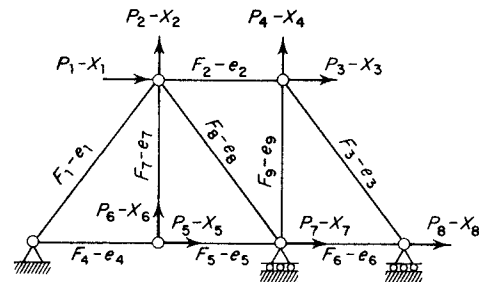


$[C] =$

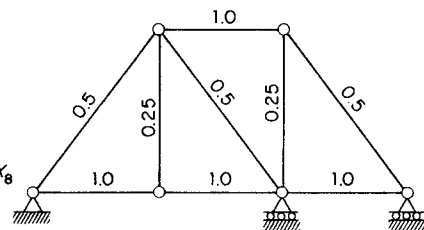
$F \backslash X$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+0.3	+0.4	0	0	0	0	0	0
2	-1.0	0	+1.0	0	0	0	0	0
3	0	0	-0.3	+0.4	0	0	0	+0.3
4	0	0	0	0	+1.0	0	0	0
5	0	0	0	0	-1.0	0	+1.0	0
6	0	0	0	0	0	0	-1.0	+1.0
7	0	+0.25	0	0	0	-0.25	0	0
8	-0.3	+0.4	0	0	0	0	+0.3	0
9	0	0	0	+0.25	0	0	0	0

$[K] =$

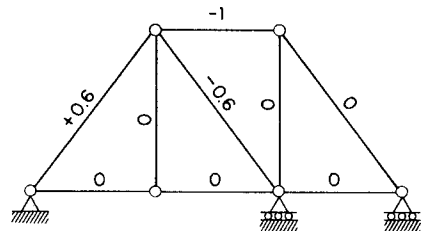
$P \backslash X$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+1.36	0	-1.00	0	0	0	-0.18	0
2	0	+0.89	0	0	0	-0.25	+0.24	0
3	-1	0	+1.18	-0.24	0	0	0	-0.18
4	0	0	-0.24	+0.59	0	0	0	+0.24
5	0	0	0	0	+2.00	0	-1.00	0
6	0	-0.25	0	0	0	+0.25	0	0
7	-0.18	+0.24	0	0	-1.00	0	+2.18	-1.00
8	0	0	-0.18	+0.24	0	0	-1.00	+1.18



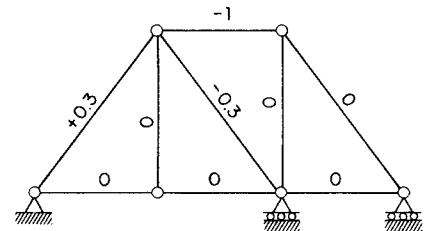
(c) $NP = 8$; $NF = 9$



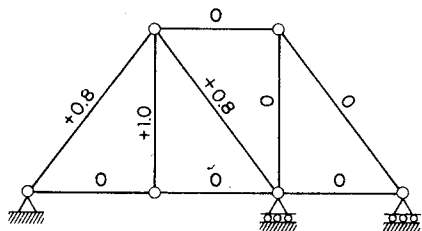
(d) Nilai-nilai $S = \frac{EA}{L}$ dalam 10^{-3} k/inci



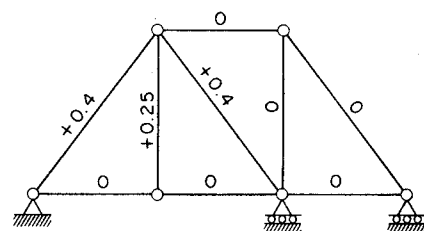
(e) Nilai-nilai e dalam inci akibat $X_1 = +1$ inci



(f) Nilai-nilai F dalam 10^3 kips akibat $X_1 = +1$ inci



(g) Nilai-nilai e dalam inci akibat $X_2 = +1$ inci



(h) Nilai-nilai F dalam 10^3 kips akibat $X_2 = +1$ inci

GAMBAR 4.10. Matriks $[C]$ dan $[K]$.

LATIHAN 4.5

Susunlah matriks $[C]$ dan $[K]$ dari rangka dalam Soal Latihan 4.2 (Gambar 4.8). Dengan memakai nilai-nilai numeris dari $\{P\}$, $\{X\}$, dan $\{F\}$ dalam soal latihan tersebut, buktikan secara numeris persamaan $\{P\} = [K]\{X\}$ dan $\{F\} = [C]\{X\}$.

4.5 Uraian dari Matriks-matriks $[C]$ dan $[K]$

Dalam pasal di muka telah dibahas matriks gaya internal lawan perpindahan titik simpul $[C]$ dan matriks gaya eksternal lawan perpindahan titik simpul $[K]$. Pada contoh soal ditunjukkan bahwa kedua matriks ini dapat dibentuk secara langsung dari kolom-kolomnya. Sebuah pernyataan juga dibuat bahwa matriks $[K]$ adalah selalu simetrik.

Dalam pasal ini akan dibuktikan bahwa matriks $[C]$ adalah merupakan hasil kali dari sebuah matriks kekakuan batang $[S]$ dan sebuah matriks perubahan bentuk $[B]$; atau

$$(4.5.1) \quad [C] = [S][B]$$

dan bahwa matriks $[K]$ adalah merupakan hasil perkalian dari tiga buah matriks, yaitu matriks statika $[A]$, matriks $[S]$ dan matriks $[B]$; atau

$$(4.5.2) \quad [K] = [A][S][B]$$

Selanjutnya, dapat dibuktikan juga bahwa matriks perubahan bentuk B adalah merupakan transposisi dari matriks statika $[A]$; atau

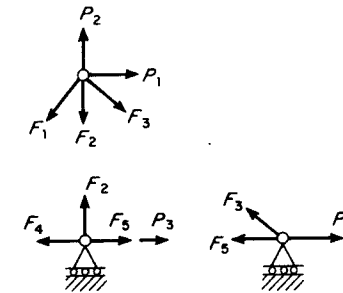
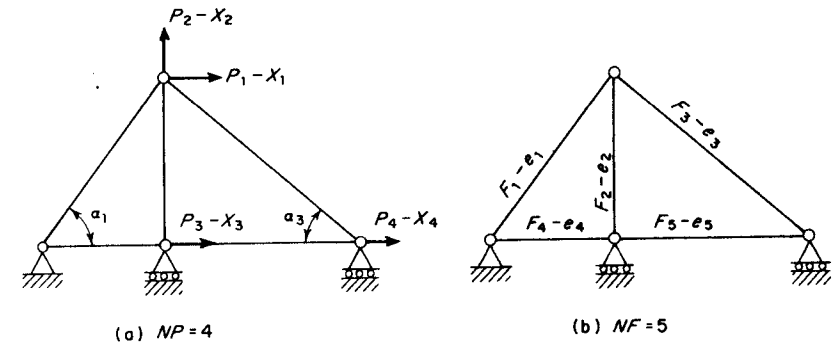
$$(4.5.3) \quad [B] = [A^T]$$

Untuk rangka sederhana pada Gambar 4.11, yang telah dikaji sebelum ini dalam Gambar 4.9, keempat persamaan statika bersama dengan keempat derajat kebebasan dapat diperoleh dengan memakai diagram bagian lepas dalam Gambar 4.11c; yaitu

$$(4.5.4a) \quad \begin{aligned} P_1 &= +F_1 \cos \alpha_1 - F_3 \cos \alpha_3 \\ P_2 &= +F_1 \sin \alpha_1 + F_2 + F_3 \sin \alpha_3 \\ P_3 &= +F_4 - F_5 \\ P_4 &= +F_3 \cos \alpha_3 + F_5 \end{aligned}$$

Persamaan (4.5.4a) dinyatakan dalam bentuk matriks, menjadi

$$(4.5.4b) \quad \{P\}_{4 \times 1} = [A]_{4 \times 5} \{F\}_{5 \times 1}$$



(c) Diagram bagian lepas

GAMBAR 4.11. Uraian dari Matriks $[C]$ dan $[K]$.

di mana

$$[A]_{4 \times 5} =$$

$P \backslash F$	1	2	3	4	5
1	$+\cos \alpha_1$	0	$-\cos \alpha_3$	0	0
2	$+\sin \alpha_1$	+1	$+\sin \alpha_3$	0	0
3	0	0	0	+1	-1
4	0	0	$+\cos \alpha_3$	0	+1

Karena matriks $[A]$, sebagaimana yang digambarkan dengan Persamaan (4.5.4), adalah berdasarkan pada persamaan-persamaan statika, maka matriks ini diberi nama *matriks statika*.

Sekarang akan diperiksa bagaimana perpanjangan dari setiap batang dapat dipengaruhi oleh tiap perpindahan titik simpul. Atas dasar analisis tingkat pertama di mana hanya komponen dari perpindahan titik simpul sepanjang batang yang merubah panjangnya batang tersebut, maka

$$\begin{aligned}
 e_1 &= +X_1 \cos \alpha_1 + X_2 \sin \alpha_1 \\
 e_2 &= +X_2 \\
 e_3 &= -X_1 \cos \alpha_3 + X_2 \sin \alpha_3 + X_4 \cos \alpha_3 \\
 e_4 &= +X_3 \\
 e_5 &= -X_3 + X_4
 \end{aligned}
 \quad (4.5.5a)$$

Persamaan (4.5.5a) dinyatakan dalam bentuk matriks, menjadi

$$\{e\}_{5 \times 1} = [B]_{5 \times 4} \{X\}_{4 \times 1} \quad (4.5.5b)$$

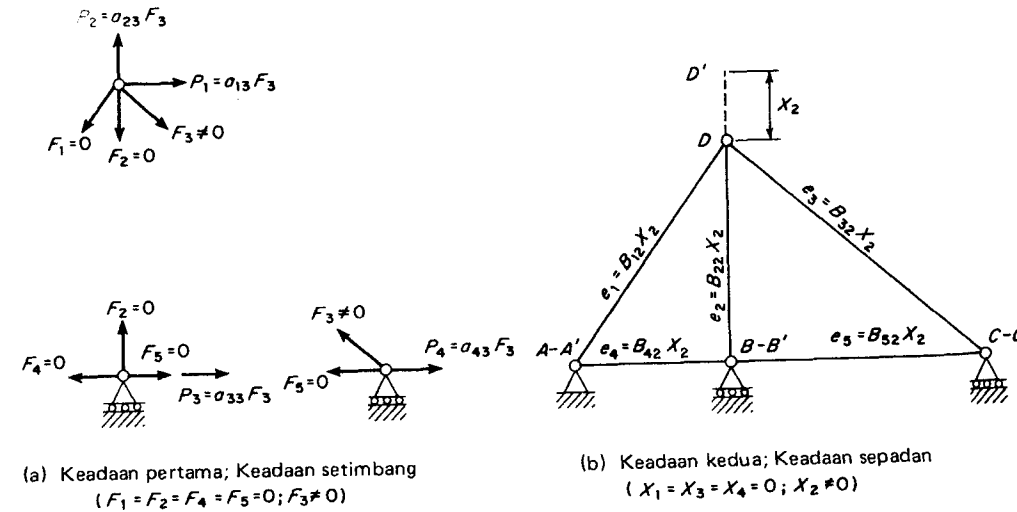
di mana

$$[B]_{5 \times 4} =$$

$e \backslash X$	1	2	3	4
1	$+\cos \alpha_1$	$+\sin \alpha_1$	0	0
2	0	+1	0	0
3	$-\cos \alpha_3$	$+\sin \alpha_3$	0	$+\cos \alpha_3$
4	0	0	+1	0
5	0	0	-1	+1

Karena matriks $[B]$ keseluruhannya didasarkan pada hubungan perubahan bentuk, maka matriks ini diberi nama *matriks perubahan bentuk*.

Pengujian terhadap Persamaan (4.5.4b) dan (4.5.5b) menghasilkan kesimpulan bahwa matriks perubahan bentuk $[B]$ adalah transposisi dari matriks statika $[A]$, dan sebaliknya. Pembuktian hubungan transposisi dapat dilakukan dengan menggunakan Prinsip Kerja Virtual, yang menyatakan bahwa kerja eksternal dan kerja internal yang masing-masing dilakukan oleh gaya-gaya dalam keadaan setimbang untuk mencapai perubahan-perubahan bentuk dari suatu keadaan sepadan, harus sama besar. Dengan mengambil



GAMBAR 4.12. Hubungan Transposisi antara Matriks A dan B .

keadaan pertama pada Gambar 4.12a sebagai keadaan setimbang dan keadaan kedua pada Gambar 4.12b sebagai keadaan sepadan, maka diperoleh persamaan kerja virtual sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \Sigma PX &= \Sigma Fe \\
 (a_{23}F_3)(X_2) &= (F_3)(b_{32}X_2) \\
 a_{23} &= b_{32}
 \end{aligned}$$

Secara umum,

$$a_{ij} = b_{ji}$$

Jadi,

$$[A] = [B^T]; \text{ atau } [B] = [A^T]$$

yang tidak lain adalah Persamaan (4.5.3).

Dengan menggunakan Hukum Hooke, hubungan antara gaya-gaya batang dan perpanjangan adalah

$$(4.5.6a) \quad F_1 = \frac{EA_1}{L_1}e_1; \quad F_2 = \frac{EA_2}{L_2}e_2; \quad \dots \quad F_5 = \frac{EA_5}{L_5}e_5$$

Persamaan (4.5.6a) dinyatakan dalam bentuk matriks, menjadi

$$(4.5.6b) \quad F_{5 \times 1} = [S]_{5 \times 5} \{e\}_{5 \times 1}$$

di mana

$$[S]_{5 \times 5} =$$

$F \backslash e$	1	2	3	4	5
1	$\frac{EA_1}{L_1}$				
2		$\frac{EA_2}{L_2}$			
3			$\frac{EA_3}{L_3}$		
4				$\frac{EA_4}{L_4}$	
5					$\frac{EA_5}{L_5}$

Karena matriks $[S]$ berisi masing-masing gaya yang diperlukan untuk memperpanjang batang-batang dengan panjang satu satuan, maka matriks ini diberi nama *matriks kekakuan batang*.

Dengan mengkombinasikan Persamaan (4.5.5b) dan (4.5.6b), didapat

$$(4.5.7) \quad \{F\} = [S]\{e\} = [S][B]\{X\}$$

dan, dengan mengkombinasikan Persamaan (4.5.4b) dan (4.5.7), didapat

$$(4.5.8) \quad \{P\} = [A]\{F\} = [A][S][B]\{X\}$$

Karena persamaan matriks $\{F\} = [C]\{X\}$ dan $\{P\} = [K]\{X\}$ telah ditetapkan dalam pasal yang terdahulu, maka sekarang Persamaan (4.5.1) dan (4.5.2) terbukti kebenarannya.

Pada analisis komputer adalah lebih mudah untuk memasukkan matriks-matriks $[A]$, $[S]$, dan $\{P\}$ sedangkan pekerjaan selanjutnya dilakukan me-

$$[B] =$$

$e \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+6	+8						
2	-1		+1					
3			-6	+8				+6
4					+1			
5					-1		+1	
6							-1	+1
7		+1				-1		
8	-6	+8						+6
9				+1				

$$[S] = 10^3 \text{ k/in.}$$

$F \backslash e$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.5								
2		1.0							
3			0.5						
4				1.0					
5					1.0				
6						1.0			
7							0.25		
8								0.5	
9									0.25

$$[C] = 10^3 \text{ k/in.}$$

$F \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+0.3	+0.4						
2	-1.0		+1.0					
3			-0.3	+0.4				+0.3
4					+1.0			
5					-1.0		+1.0	
6							-1.0	+1.0
7		+0.25				-0.25		
8	-0.3	+0.4						+0.3
9				+0.25				

$$[A] =$$

$P \backslash F$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+0.6	-1.0						-0.6	
2	+0.8						+1.0	+0.8	
3		+1.0	-0.6						
4			+0.8						+1.0
5				+1.0	-1.0				
6							-1.0		
7					+1.0	-1.0		+0.6	
8			+0.6			+1.0			

$$[K] = 10^3 \text{ k/in.}$$

$P \backslash x$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+1.36	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	-0.18	0.0
2	0.0	+0.89	0.0	0.0	0.0	-0.25	+0.24	0.0
3	-1.0	0.0	+1.18	-0.24	0.0	0.0	0.0	-0.18
4	0.0	0.0	-0.24	+0.57	0.0	0.0	0.0	+0.24
5	0.0	0.0	0.0	0.0	+2.0	0.0	-1.0	0.0
6	0.0	-0.25	0.0	0.0	0.0	+0.25	0.0	0.0
7	-0.18	+0.24	0.0	0.0	-1.0	0.0	+2.18	-1.0
8	0.0	0.0	-0.18	+0.24	0.0	0.0	-1.0	+1.18

GAMBAR 4.13. Penyelesaian Contoh Soal 4.4.

lalui proses oleh komputer untuk menghasilkan keluaran berupa matriks-matriks $\{X\}$ dan $\{F\}$ yaitu melalui operasi sebagai berikut:

- 1) $\{X\} = [ASA^T]^{-1}\{P\}$
- 2) $\{F\} = [SA^T]\{X\}$

Berdasarkan pada rumus umum aljabar matriks yang menyatakan bahwa

$$[AB]^T = [B^T][A^T]$$

maka matriks $[K]$ dapat dibuktikan sebagai matriks simetrik sebagai berikut:

Diketahui $[A], [S] = [S^T], [K] = [ASA^T]$

Buktikan $[K] = [K^T]$

Bukti Ruas kanan $= [K^T] = [ASA^T]^T = [SA^T]^T[A]^T = [A][S]^T[A^T]$
 $= [A][S][A^T] = [K] = \text{ruas kiri}$

Contoh Soal 4.4. Susunlah matriks $[A]$, $[S]$, dan $[B]$ dari rangka dalam Gambar 4.10, dan buktikan hubungan $[B] = [A^T]$. Hitung $[C] = [S][B]$ dan $[K] = [A][S][B]$ serta perhatikan bahwa hasil-hasil yang sama telah didapatkan sebelumnya pada Contoh Soal 4.3.

Penyelesaian. Berdasarkan pada diagram $P-X$ dan $F-e$ dalam Gambar 4.10, diberikan daftar-daftar yang diperlukan untuk penyelesaian soal ini pada Gambar 4.13.

LATIHAN 4.6

Daripada membentuk matriks $[C]$ dan $[K]$ secara langsung dengan kolom-kolom yang sesuai dengan definisinya sendiri masing-masing, cobalah untuk menghitung kedua matriks ini untuk Soal Latihan 4.5 dengan menggunakan persamaan $[C] = [S][B]$ dan $[K] = [A][S][B]$.

4.6 Catatan Penutup

Ciri-ciri penting dari cara-cara gaya dan perpindahan untuk menganalisis struktur telah diuraikan khususnya untuk struktur rangka.

Cara gaya seharusnya disebut dengan nama lengkapnya, yaitu cara "gaya kelebihan", karena gaya-gaya kelebihan dalam rangka-rangka statik tidak-tertentu merupakan pokok yang tidak diketahui.

Dalam masa prakomputer, cara perpindahan dalam analisis rangka tidak sebanyak yang dipakai dalam analisis untuk balok malar atau kerangka kaku, terutama karena jumlah persamaan-persamaan simultan untuk mencari $\{X\}$ dari persamaan $\{X\} = [ASA^T]^{-1}\{P\}$ cukup banyak.

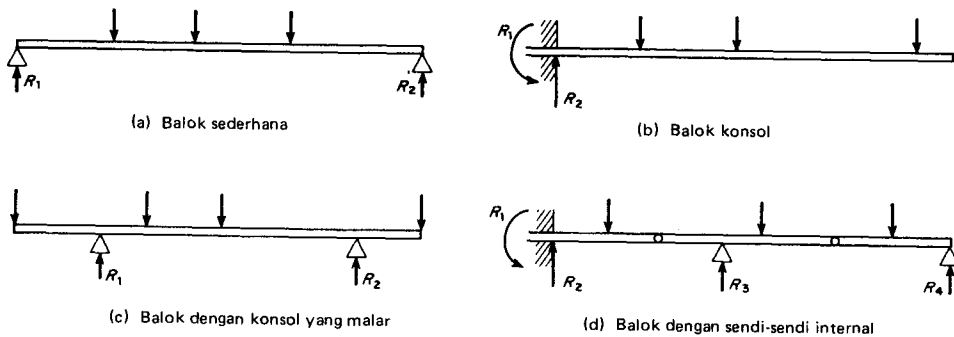
Cara gaya secara langsung dihubungkan dengan Teorema Kerja Terkecil untuk struktur-struktur statik tidak-tertentu. Teorema ini, akan dikembangkan lebih lanjut dalam Bab 8.

Balok-balok Statik tertentu

5

5.1 Definisi dari sebuah Balok Statik Tertentu

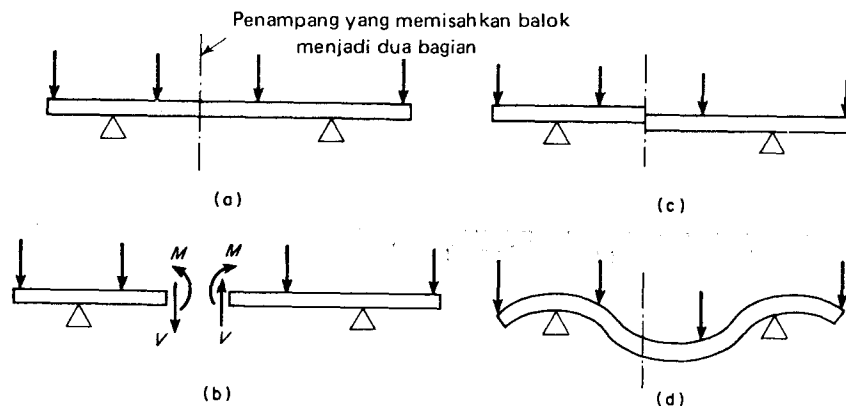
Sebuah *balok adalah statik tertentu* (*statically determinate beam*) bila secara sempurna dapat dianalisis oleh persamaan-persamaan statika. Balok-balok sederhana, konsol, konsol malar seperti diperlihatkan dalam Gambar 5.1a, b dan c adalah tiga tipe yang lazim dari balok-balok statik tertentu. Karena hanya terdapat dua persamaan statika yang bebas bila balok seluruhnya dianggap sebagai sebuah bagian lepas, masing-masing ketiga tipe dari balok tersebut hanya mengandung dua reaksi yang tidak diketahui, R_1 dan R_2 . Akan tetapi, balok dari Gambar 5.1d masih statik tertentu, meskipun memiliki empat reaksi yang tidak diketahui, karena adanya dua sendi internal menghasilkan dua persyaratan statika tambahan yang mensyaratkan bahwa momen lentur pada tiap sendi internal adalah nol.



GAMBAR 5.1. Balok-balok Statik Tertentu.

5.2 Gaya-gaya Geser dan Momen-momen Lentur pada Balok-balok (Shears and Bending Moments in Beams)

Bila sebuah balok dipisahkan menjadi dua bagian pada sebuah penampang, maka pada tiap-tiap bagian terdiri atas sebuah gaya geser V dan sebuah momen lentur M , yang bertanda positif untuk arah-arah yang diperlihatkan dalam Gambar 5.2b. Gaya geser pada sebuah potongan adalah positif bila bagian kiri dari balok condong bergerak ke atas ketika penampang tersebut dipotong, seperti diperlihatkan dalam Gambar 5.2c; momen lentur pada sebuah potongan adalah positif bila balok melentur cekung pada bagian atas akibat kerja lentur tersebut. Bahwa tanda-tanda pada Gambar 5.2b, c, dan d adalah konsisten dapat digambarkan dari keadaan bahwa bagian kanan perlu bekerja dengan sebuah gaya V ke bawah pada bagian kiri untuk mempertahankan bagian kiri dari pergeseran ke atas secara relatif terhadap bagian



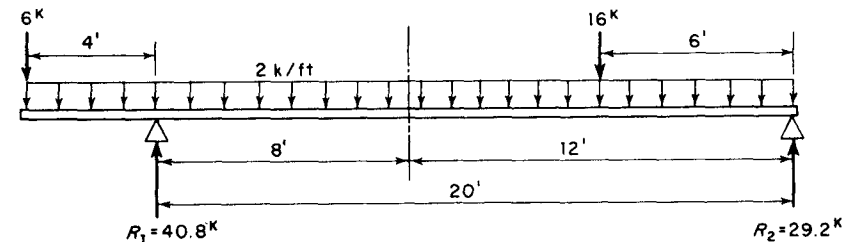
GAMBAR 5.2. Gaya Geser dan Momen Lentur pada sebuah Penampang.

kanan, dan bahwa momen-momen M dihasilkan oleh tegangan-tegangan tarik dan tekan yang bekerja secara berturut-turut pada bagian bawah dan atas dari penampang.

Dengan meninjau kesetimbangan dari bagian lepas sebelah kiri pada Gambar 5.1b, gaya geser V adalah jumlah dari semua gaya *ke atas* (upward) antara ujung sebelah kiri dan penampang, dan momen lentur M adalah jumlah dari semua momen yang *searah jarum jam* (clockwise) terhadap penampang. Tetapi bila bagian lepas sebelah kanan yang ditinjau, maka gaya geser V adalah jumlah dari semua gaya *ke bawah* (downward) antara ujung sebelah kanan dan penampang, dan momen lentur M adalah jumlah dari semua momen yang *berlawanan arah jarum jam* (counter clockwise) terhadap penampang.

Informasi tentang gaya geser dan momen lentur pada sebuah penampang diperlukan dalam perencanaan kekuatan balok pada penampang tersebut.

Contoh Soal 5.1. Untuk balok dalam Gambar 5.3, hitunglah reaksi-reaksi R_1 dan R_2 dan nilai-nilai dari V dan M pada sebuah penampang 8 kaki sebelah kanan dari penyangga sebelah kiri.



GAMBAR 5.3. Balok dari Contoh 5.1.

Penyelesaian. (a) Reaksi-reaksi R_1 dan R_2 . Dengan mengambil momen-momen terhadap R_2 , maka

$$20R_1 = 16(6) + 6(24) + 48(12); \quad R_1 = 40.8 \text{ kips}$$

Dengan mengambil momen-momen terhadap R_1 , maka

$$20R_2 = 16(14) - 6(4) + 48(8); \quad R_2 = 29.2 \text{ kips}$$

Pemeriksaan dengan $\Sigma F_y = 0$,

$$40.8 + 29.2 = 6 + 16 + 48; \quad 70 = 70$$

(b) V dan M 8 kaki sebelah kanan dari R_1 . Dengan mempergunakan bagian lepas sebelah kiri,

$$V = +40.8 - 6 - 24 = +10.8 \text{ kips}$$

$$M = 40.8(8) - 6(12) - 24(6) = +110.4 \text{ ft-kips}$$

Diperiksa dengan menggunakan bagian lepas sebelah kanan,

$$V = +16 + 24 - 29.2 = +10.8 \text{ kips}$$

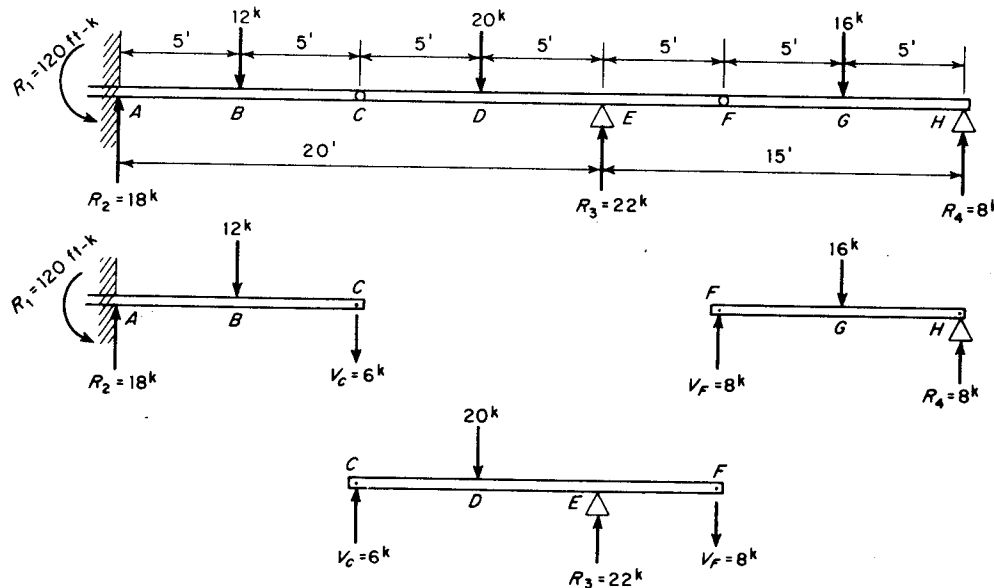
$$M = 29.2(12) - 16(6) - 24(6) = +110.4 \text{ ft-kips}$$

Contoh Soal 5.2. Untuk balok dalam Gambar 5.4, hitunglah reaksi-reaksi R_1 sampai R_4 dan momen lentur M di R_3 .

Penyelesaian

(a) Reaksi-reaksi R_1 sampai dengan R_4 . Dengan mengambil FGH sebagai sebuah bagian lepas,

$$V_F = 8 \text{ kips}; \quad R_4 = 8 \text{ kips}$$



GAMBAR 5.4. Balok dari Contoh 5.2.

Dengan mengambil $CDEF$ sebagai sebuah bagian lepas (free body)

$$V_C = 6 \text{ kips}; \quad R_3 = 22 \text{ kips}$$

Dengan mengambil ABC sebagai sebuah bagian lepas

$$R_1 = 120 \text{ ft-kips}; \quad R_2 = 18 \text{ kips}$$

Pemeriksaan dengan mengambil seluruh balok sebagai sebuah bagian yang lepas,

$$18 + 22 + 8 = 12 + 20 + 16; \quad 48 = 48$$

$$\Sigma M_A = 120 + 22(20) + 8(35) - 12(5) - 20(15) - 16(30) = 840 - 840 = 0$$

(b) Momen lentur M di R_3 . Dengan mempergunakan bagian yang lepas sebelah kiri,

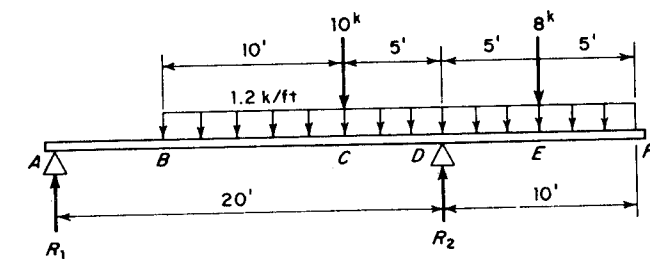
$$M \text{ at } R_3 = -120 + 18(20) - 12(15) - 20(5) = -40 \text{ ft-kips}$$

Dengan menggunakan bagian lepas sebelah kanan,

$$M \text{ at } R_3 = 8(15) - 16(10) = -40 \text{ ft-kips}$$

LATIHAN 5.1

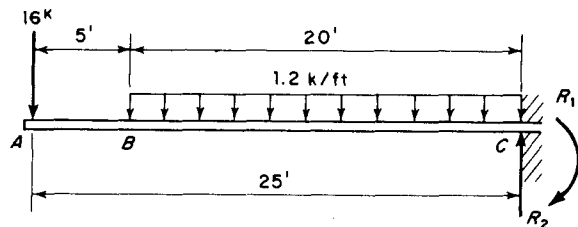
Untuk balok tertentu yang diperlihatkan dalam Gambar 5.5 hitunglah reaksi-reaksi R_1 dan R_2 serta nilai-nilai dari V dan M pada sebuah potongan 10 ft sebelah kanan dari penyangga sebelah kiri.



GAMBAR 5.5. Latihan 5.1.

LATIHAN 5.2

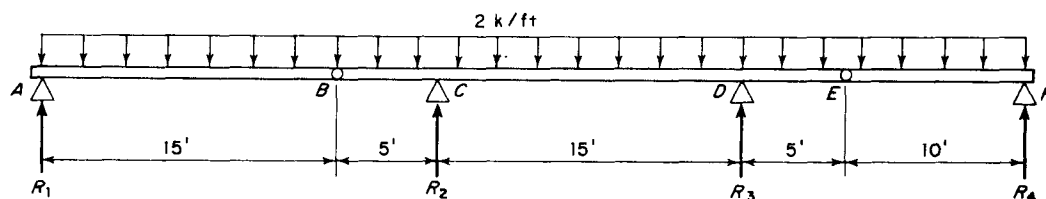
Untuk balok tertentu yang diperlihatkan dalam Gambar 5.6 hitung reaksi-reaksi R_1 dan R_2 , dan nilai dari V dan M pada sebuah potongan 10 ft dari ujung kiri.



GAMBAR 5.6. Latihan 5.2.

LATIHAN 5.3

Untuk balok yang diketahui diperlihatkan dalam Gambar 5.7 hitung reaksi R_1 sampai dengan R_4 , dan nilai-nilai V dan M pada sebuah potongan dipertengahan antara R_2 dan R_3 .



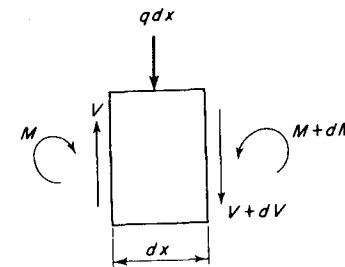
GAMBAR 5.7. Latihan 5.3.

5.3 Hubungan antara Beban, Gaya Geser dan Persamaan-persamaan Momen

Penampang-penampang tanpa kemalaran (sections of discontinuity) biasanya berada sepanjang sebuah balok, ini adalah penampang-penampang di mana sebuah beban terpusat atau reaksi bekerja, atau di mana muatan terbagi rata, besar atau polanya berubah. Beban, gaya geser dan momen pada sebarang titik di antara dua penampang tanpa kemalaran dapat diungkapkan dalam besaran-besaran dari sebuah variabel bebas yang menyatakan jarak dari titik terhadap titik rujukan yang dipilih secara bebas. Ungkapan-ungkapan ini disebut *persamaan-persamaan beban, gaya geser dan momen*.

Ada hubungan antara persamaan-persamaan untuk intensitas beban terbagi q , gaya geser V , dan momen M pada sebuah penampang pada sebuah balok. Penerapan dua persamaan statika ke diagram bagian-bagian lepas dari sebuah panjang diferensial dx diperlihatkan dalam Gambar 5.8,

$$(5.3.1) \quad \frac{dV}{dx} = -q$$

GAMBAR 5.8. Diagram Bagian Lepas dari sebuah Panjang Diferensial dx .

dan,

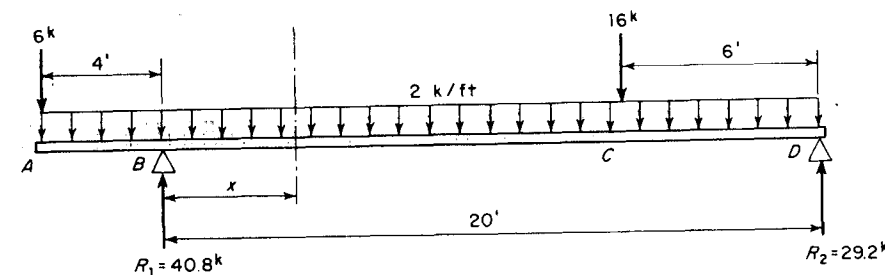
$$(5.3.2) \quad \frac{dM}{dx} = +V$$

Kombinasi dari persamaan-persamaan (5.3.1) dan (5.3.2) memberikan

$$(5.3.3) \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q$$

Contoh Soal 5.3. Untuk balok dari Contoh 5.1 (yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.9), carilah persamaan-persamaan untuk q , V , dan M pada sebuah penampang di dalam BC dengan menggunakan jarak x dari B sebagai variabel bebas, pertama-tama dengan menggunakan bagian lepas sebelah kiri dan kemudian dengan menggunakan bagian lepas sebelah kanan. Ujilah hubungan-hubungan $\frac{dV}{dx} = -q$ dan $\frac{dM}{dx} = V$.

Penyelesaian. Dengan menggunakan bagian lepas sebelah kiri,



GAMBAR 5.9. Balok dari Contoh 5.3.

$$q = +2 \text{ k/ft}$$

$$V = +40.8 - 6 - 2(4 + x) = +26.8 - 2x$$

$$M = +40.8x - 6(4 + x) - \frac{2(4 + x)^2}{2} = -40 + 26.8x - x^2$$

Dengan menggunakan bagian lepas sebelah kanan,

$$q = +2 \text{ k/ft}$$

$$V = -29.2 + 16 + 2(20 - x) = +26.8 - 2x$$

$$M = +29.2(20 - x) - 16(14 - x) - \frac{2(20 - x)^2}{2} = -40 + 26.8x - x^2$$

Catat bahwa diperoleh persamaan-persamaan beban, gaya geser dan momen yang sama, dan dua hubungan diferensial adalah memuaskan.

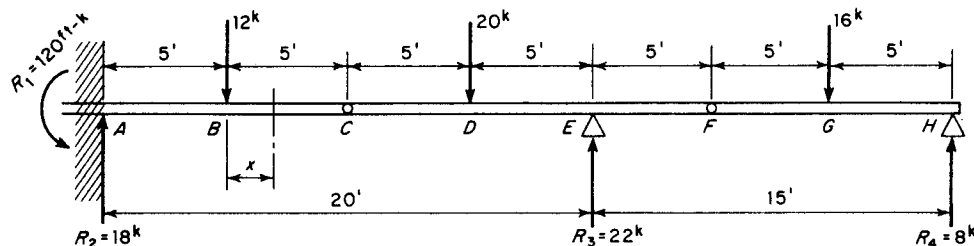
Contoh Soal 5.4. Untuk balok dari Contoh 5.2 yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.10, carilah persamaan-persamaan untuk q , V dan M pada sebuah penampang di dalam BCD dengan menggunakan jarak x dari B sebagai variabel bebas, pertama-tama dengan menggunakan bagian lepas sebelah kiri kemudian dengan menggunakan bagian lepas sebelah kanan. Catat bahwa sebuah sendi internal bukan merupakan sebuah penampang tanpa kemalaran sehubungan dengan q , V dan M , tetapi adalah merupakan penampang tanpa kemalaran pada kurva elastiknya seperti yang akan diterangkan kemudian dalam bab ini.

Penyelesaian. Dengan menggunakan bagian lepas sebelah kiri,

$$q = 0$$

$$V = +18 - 12 = +6 \text{ kips}$$

$$M = -120 + 18(5 + x) - 12x = -30 + 6x$$



GAMBAR 5.10. Balok dari Contoh 5.4.

Dengan menggunakan bagian lepas sebelah kanan,

$$q = 0$$

$$V = -22 - 8 + 20 + 16 = +6 \text{ kips}$$

$$M = 8(30 - x) + 22(15 - x) - 16(25 - x) - 20(10 - x) = -30 + 6x$$

LATIHAN 5.4

Untuk balok dari Latihan 5.1 (Gambar 5.5) dapatkan persamaan-persamaan untuk q , V , dan M di dalam segmen CD dengan menggunakan jarak x dari C sebagai variabel independen (bebas).

LATIHAN 5.5

Untuk balok dari Latihan 5.2 (Gambar 5.6) dapatkan persamaan-persamaan untuk q , V , dan M di dalam segmen BC dengan menggunakan jarak x dari C sebagai variabel independen.

LATIHAN 5.6

Untuk balok dari Latihan 5.3 (Gambar 5.7) dapatkan persamaan-persamaan untuk q , V dan M di dalam ABC dengan menggunakan jarak x dari A sebagai variabel independen.

5.4 Diagram-diagram Gaya Geser dan Momen

Sebuah *diagram gaya geser* atau *momen* menunjukkan variasi dari gaya geser atau momen sepanjang bentang dari sebuah balok dengan menunjukkan gambaran beruntun, biasanya pada sebuah garis dasar horisontal. Diagram-diagram geser dan momen adalah penting karena perencanaan dapat memanfaatkannya secara visual pada perencanaan kekuatan balok.

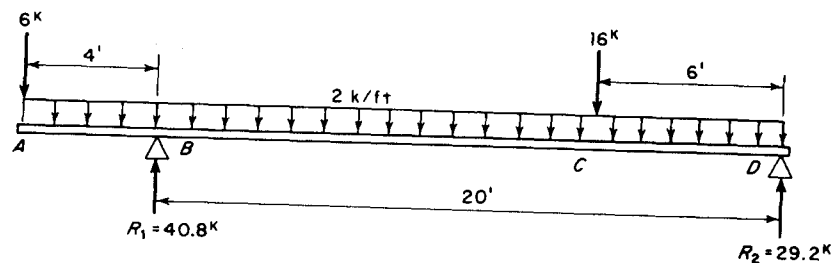
Karena gaya geser pada sebuah penampang adalah jumlah dari gaya-gaya ke atas antara ujung kiri dan penampang, diagram gaya geser dapat digambar secara mudah dengan memulai pada ujung kiri dan naik turun mengikuti beban sampai dicapai ujung kanan. Karena kelandaian dari kurva gaya geser adalah intensitas beban, variasi gaya geser adalah berupa garis lurus yang datar pada bagian yang tidak dimuati, dan harus miring secara linear menurun ke kanan pada bagian yang mendapat muatan terbagi rata.

Diagram momen dapat digambarkan dengan pertama-tama menghitung ordinat-ordinatnya pada penampang-penampang tanpa kesinambungan kemudian mensketsa kurva dengan tangan. Dari Persamaan (5.3.1),

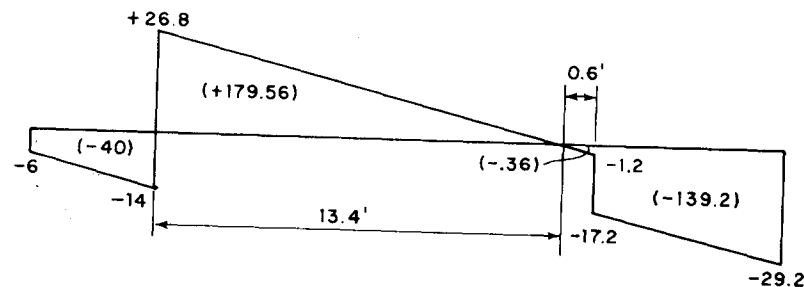
(5.4.1)

$$\int dM = \int V dx$$

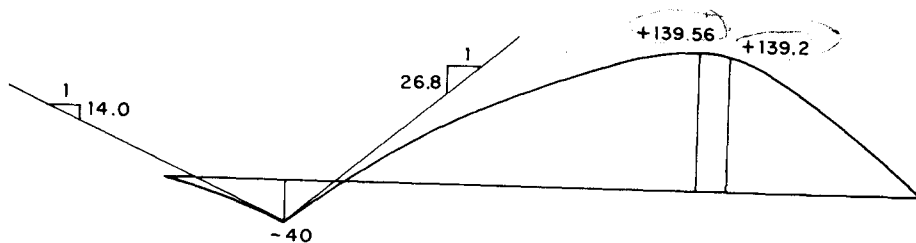
yang berarti bahwa bertambahnya momen antara sebuah penampang dan sebuah penampang di sebelah kanannya adalah sama dengan luas dari diagram geser antara kedua penampang tersebut. Dengan mulai dari ujung kiri dan berturut-turut menggunakan Persamaan (5.4.1), momen-momen pada penampang-penampang berapa banyakpun dapat dihitung dan digambar. Sebuah kontrol visual terhadap hubungan antara kurva-kurva momen dan gaya geser haruslah dilakukan dengan mencatat bahwa kelandaian sudut garis singgung terhadap kurva momen pada sebarang titik adalah sama dengan intensitas geser pada titik tersebut.



(a)



(b) Diagram gaya geser



(c) Diagram momen

GAMBAR 5.11. Penyelesaian untuk Contoh soal 5.5

Bila reaksi-reaksi dihitung secara benar, diagram gaya geser mulai dari sebuah nilai nol pada sebelah ujung kiri, dan berakhir dengan nilai nol pada ujung kanan, dan diagram mulai dengan nilai yang telah diketahui (bila tidak sama dengan nol) pada ujung kiri, dan terakhir dengan nilai yang telah diketahui (bila tidak sama dengan nol) pada ujung kanan. Dengan perkataan lain, diagram gaya geser dan diagram momen juga haruslah tertutup.

Contoh Soal 5.5. Gambar diagram-diagram gaya geser dan momen untuk balok dari Contoh 5.1 atau 5.3, yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.11a.

Penyelesaian. Diagram gaya geser dalam Gambar 5.11b digambar dulu dan ternyata menutup. Titik gaya geser nol adalah di $26,8/20 = 13,4$ ft dari titik B, atau $1,2/2,0 = 0,6$ ft dari titik C. Luas-luas gaya geser dihitung ternyata $-40, +179,56, -0,36$, dan $-139,2$ ft-kips. Karena perubahan momen-momen antara A dan D adalah nol, jumlah dari luas keempat gaya geser haruslah nol.

Garis singgung terhadap kurva momen adalah horisontal pada penampang dari gaya geser nol; jadi, ada sebuah momen positif maksimum di titik ini. Catat dalam Gambar 5.11c kelandaian dari kurva momen berubah-ubah dari $-14,0$ ke $+26,8$ pada titik B.

Contoh Soal 5.6. Gambar diagram-diagram gaya geser dan momen untuk balok dari Contoh-contoh 5.2 atau 5.4, yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.12a.

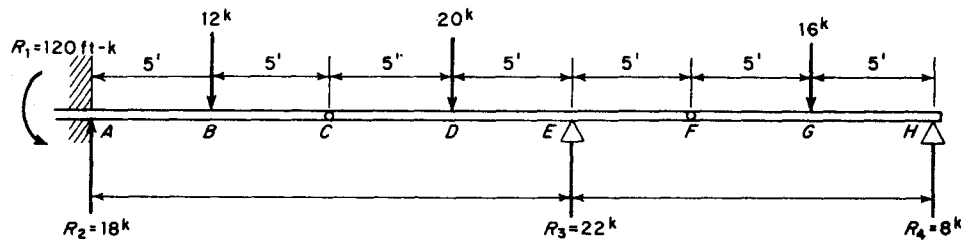
Penyelesaian. Diagram gaya geser dalam Gambar 5.12b digambar pertama-tama dan ternyata menutup. Karena momen di A adalah -120 ft-kips dan momen di H adalah nol, perubahannya adalah $+120$ ft-kips. Jumlah dari kelima luas gaya geser dalam Gambar 5.12b adalah juga $+120$ ft-kips. Dengan demikian diagram momen dari Gambar 5.12c menutup. Catat bahwa momen pada sendi-sendi internal C dan F adalah nol.

LATIHAN 5.7

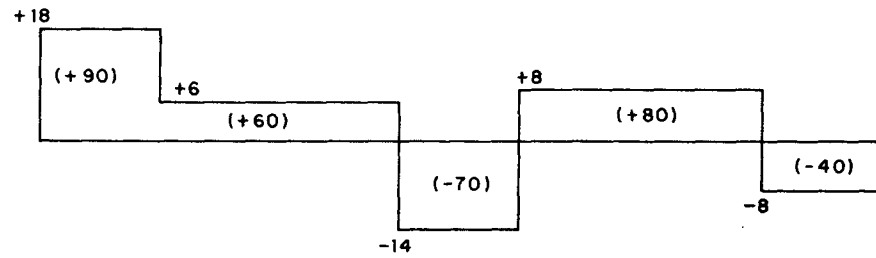
Gambar diagram-diagram gaya geser dan momen untuk balok dari Latihan-latihan 5.2 atau 5.5 (Gambar 5.6).

LATIHAN 5.8

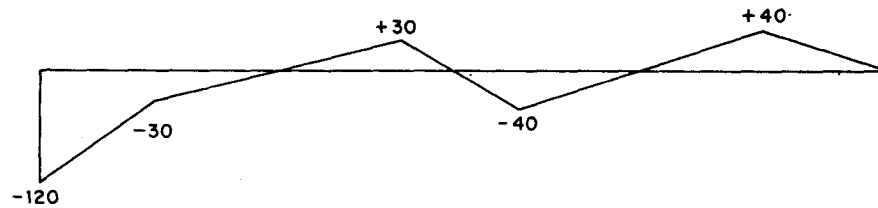
Gambar diagram-diagram gaya geser dan momen untuk balok dari Latihan 5-2 atau 5.5 (Gambar 5.6).



(a)



(b) Diagram gaya geser



(c) Diagram momen

GAMBAR 5.12. Penyelesaian untuk Contoh 5.6.

LATIHAN 5.9

Gambar diagram-diagram gaya geser dan momen untuk balok dari latihan-latihan 5.3 atau 5.6 (Gambar 5.7).

5.5 Kurva-kurva Elastik dari Balok-balok Statik Tertentu

Persamaan diferensial dari *kurva elastik* dari sebuah balok adalah sebuah fungsi dari momen M dan kekakuan lentur EI ; dalam bentuk simbol,

$$(5.5.1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

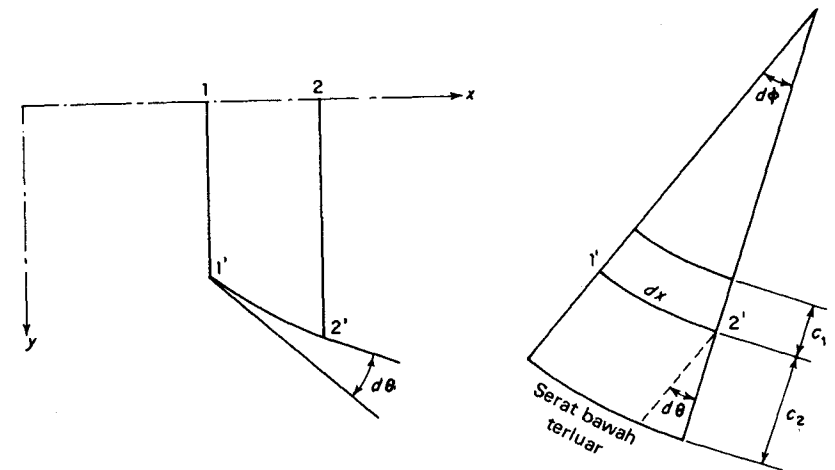
Persamaan (5.5.1) dapat diturunkan dengan mengamati Gambar 5.13, di mana

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(dy/dx)}{dx} = -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{dx} \left[\frac{\text{pertambahan panjang serat bawah}}{c_2} \right] \\ &= -\frac{1}{dx} \left[\frac{Mc_2}{EI} dx / c_2 \right] = -\frac{M}{EI} \end{aligned}$$

Catat bahwa ada tanda negatif di muka $\frac{d\theta}{dx}$ karena dengan sumbu y yang positif mengarah ke bawah, kalandaian $\frac{dy}{dx}$ berkurang jika x bertambah.

Persamaan dari kurva elastik dapat diperoleh dengan mengintegrasikan Persamaan (5.5.1) dua kali dan mengetrapkan syarat-syarat tepi yang sesuai. Kurva elastik terputus bila persamaan momen atau batas tepi berubah-ubah. Sebuah sendi internal dalam sebuah balok tidak menyebabkan ketidakmalaran dari persamaan momen, tetapi akan mengakibatkan hal demikian pada persamaan kurva elastik karena kelandaian dapat berubah secara mendadak pada sebuah sendi semacam itu.

Cara integrasi rangkap adalah berguna bila persamaan kurva elastik yang lengkap disyaratkan. Akan tetapi, cara ini sulit diterapkan bila ada penampang-penampang tanpa kemalaran karena melibatkan banyak integrasi bilangan-bilangan konstan. Bila hanya lendutan-lendutan atau kelandaian-kelandaian di beberapa titik yang dipilih pada balok diperlukan, cara satuan beban atau cara luas momen adalah jauh lebih mudah dikerjakan.



GAMBAR 5.13. Persamaan Diferensial dari Kurva Elastik.

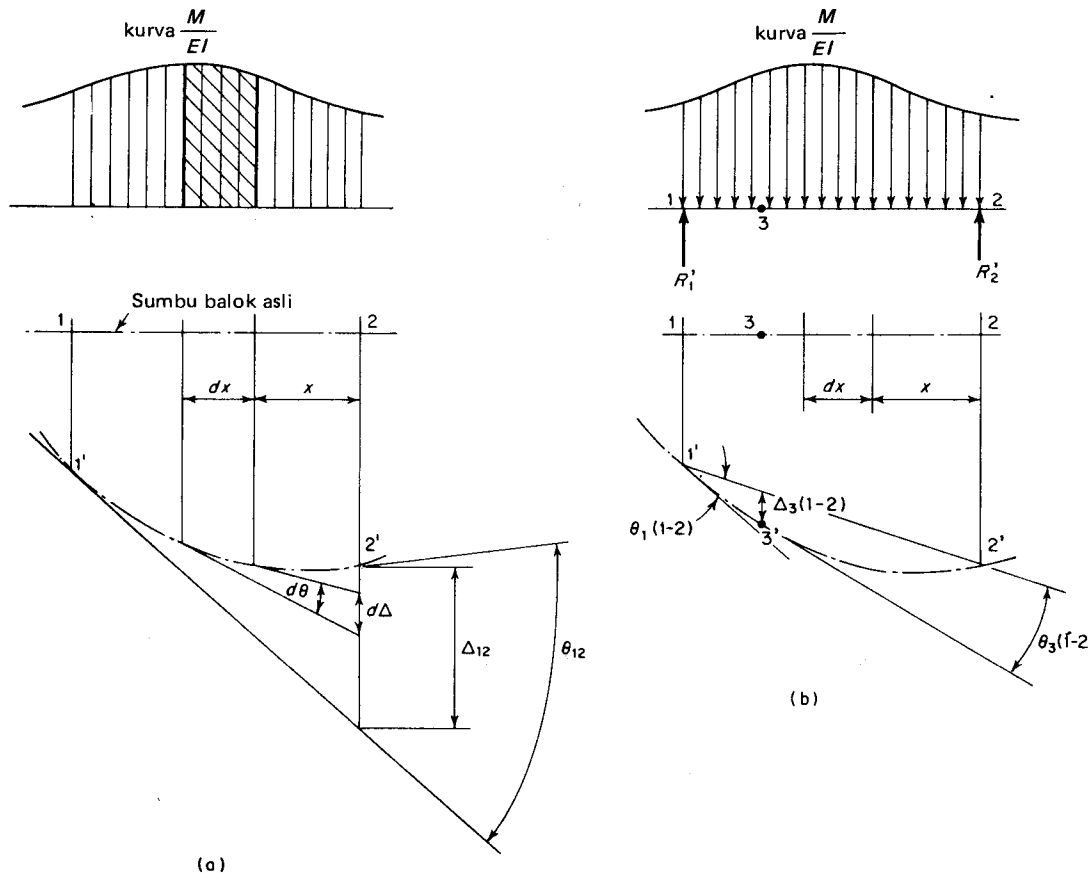
5.6 Cara Luas Momen

Cara luas momen (moment-area method) dalam gabungan dengan cara pelengkapannya, yakni cara balok terpadu, dapat dipergunakan secara mudah untuk menentukan lendutan-lendutan atau kelayakan-kelayakan di titik-titik yang dipilih pada kurva elastik dari sebuah balok.

Cara-momen luas didasarkan pada dua teorema, dikenal sebagai Teorema-teorema Luas Momen-momen I dan II:

Teorema Luas Momen I: —"Perubahan dari kelayakan antara dua titik pada sebuah kurva elastik yang malar adalah sama dengan M/EI dari luas antara kedua titik tersebut."

Teorema Luas Momen II: —"Jarak antara titik kedua pada sebuah kurva elastik yang malar terhadap garis singgung pada titik pertama, yang diukur



GAMBAR 5.14. Luas Momen dan Teorema-teorema Balok Terpadu.

pada suatu arah tegaklurus pada sumbu asli dari balok, adalah sama dengan momen dari M/EI dari luas antara kedua titik tersebut terhadap titik kedua."

Dengan merujuk pada Gambar 5.14a kedua teorema luas momen dapat diungkapkan sebagai

$$(5.6.1) \quad \theta_{12} = \int_1^2 \frac{M}{EI} dx$$

$$(5.6.2) \quad \Delta_{12} = \int_1^2 \frac{Mx dx}{EI}$$

Bukti dari Persamaan (5.6.1) dapat diambil langsung dari Persamaan (5.5.1); atau

$$d\theta \text{ dalam Gambar 5.14a} = \frac{M}{EI} dx$$

dari mana

$$\theta_{12} = \int_1^2 d\theta = \int_1^2 \frac{M}{EI} dx$$

Berdasarkan anggapan dasar pertama yang menyatakan bahwa semua lendutan adalah kecil, semua panjang dari semua garis miring dalam Gambar 5.14a adalah sama dengan proyeksi-proyeksi pada sumbu asli dari balok; jadi

$$d\Delta = x d\theta$$

dari mana

$$\Delta_{12} = \int_1^2 d\Delta = \int_1^2 \frac{Mx dx}{EI}$$

Cara balok terpadu (conjugate-beam method) didasarkan pada dua pelengkap dari teorema-teorema luas momen, yang umumnya dikenal sebagai Teorema-teorema Balok-Terpadu I dan II:

Teorema Balok Terpadu I: —"Sudut sesuai arah jarum jam antara sebuah garis lurus yang menghubungkan sebarang dua titik pada sebuah kurva elastik yang malar dan garis singgung pada sebuah titik ketiga berikutnya adalah sama dengan gaya geser pada titik ketiga pada sebuah balok sederhana dengan bentang yang sama dengan jarak antara kedua titik batas dan dibebani oleh luas $M/(EI)$."

Teorema Balok Terpadu II: —"Jarak dari sebuah titik ketiga berikutnya terhadap sebuah garis lurus yang menghubungkan dua buah titik-titik pada kurva elastik yang malar, diukur pada sebuah arah tegaklurus pada sumbu asli dari balok, adalah sama dengan momen pada titik ketiga pada sebuah

balok sederhana dengan bentang yang sama dengan jarak antara kedua titik batas dan dibebani oleh luas $M/(EI)$ ”.

Dengan merujuk pada Gambar 5.14b, kedua teorema balok terpadu dapat diungkapkan dengan

$$(5.6.3) \quad \theta_3(1-2) = V'_3 = R'_1 - \left[\text{luas } \frac{M}{EI} \text{ antara 1 dan 3} \right]$$

dan

$$(5.6.4) \quad \Delta_3(1-2) = M'_3 = [R'_1 \text{ dikalikan jarak } 1-3] \\ - [\text{momen dari luas } \frac{M}{EI} \text{ antara 1 dan 3 terhadap 3}]$$

Persamaan (5.6.3) dan (5.6.4) dapat dibuktikan dengan bantuan dari Persamaan (5.6.1) dan (5.6.2). Dengan menggunakan teorema luas-momen kedua,

$$\theta_1(1-2) = \frac{\text{jarak dari 2' terhadap garis singgung di 1'}}{\text{jarak } 1-2} \\ = \frac{\text{momen dari luas } M/EI \text{ antara 1 dan 2 terhadap 2}}{\text{jarak } 1-2} = R'_1$$

Dengan menggunakan teorema luas-momen pertama

$$\theta_3(1-2) = \theta_1(1-2) - (\text{perubahan dari kelandaian antara 1 dan 3}) \\ = R'_1 - \left(\frac{M}{EI} \text{ luas } \frac{M}{EI} \text{ antara 1 dan 3} \right) = V'_3$$

di mana adalah Persamaan (5.6.3). Dari Gambar 5.14b,

$$\Delta_3(1-2) = [\theta_1(1-2) \text{ kali jarak } 1-3] - [\text{jarak dari 3' terhadap garis singgung di 1'}] \\ = [R'_1 \text{ kali jarak } 1-3] - [\text{momen dari luas } \frac{M}{EI} \text{ antara 1-3 terhadap 3}] \\ = M'_3$$

di mana adalah Persamaan (5.6.4).

Prosedur penggunaan cara luas momen untuk mendapatkan lendutan-lendutan dan kelandaian-kelandaian pada titik-titik yang ditentukan pada kurva elastik dari sebuah balok adalah seperti berikut:

- a) hitunglah reaksi-reaksi dan gambar diagram-diagram gaya geser; dan momen.

- b) bila momen lembam sepanjang balok tidak konstan, rubah dan sesuaikanlah diagram momen dengan memampatkan ordinat dengan n kali selalu menjadi $I = nI_c$, di mana I_c adalah momen lembam standar;
- c) buatlah sketsa dengan tangan kurva elastik dengan mengamati tanda momen untuk tiap segmen di antara dua penampang tanpa kesinambungan yang berdekatan;
- d) terapkan teorema-teorema luas momen di antara dua titik malar bila keduanya baik kelandaian maupun lendutan di satu di antara dua titiknya diketahui, nol atau angka lainnya; dan
- e) terapkanlah teorema-teorema balok terpadu antara dua titik malar bila lendutan-lendutannya pada kedua titik tersebut diketahui tetapi kelandaian-kelandaian tidak, nol atau angka lainnya.

Contoh Soal 5.7. Dengan cara luas momen hitunglah kelandaian dan lendutan pada titik A dari balok pada Contoh-contoh 5.1, 5.3 atau 5.5. Anggaplah kekakuan lentur EI sepanjang balok adalah konstan.

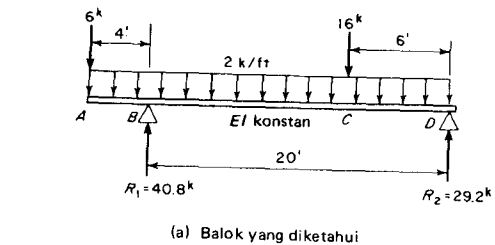
Penyelesaian. Reaksi-reaksi dan diagram momen diambil dari Contoh-contoh 5.1 dan 5.5 dan diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.15a dan b. Berdasarkan diagram momen, sebuah sketsa tangan dari kurva elastik dibuat dan diperlihatkan dalam Gambar 5.15c. Meskipun kurva elastik di antara titik A dan titik lentur balik haruslah cembung pada puncak, apakah kelandaian di A searah dengan jarum jam seperti diperlihatkan, dan apakah lendutan di A adalah ke atas seperti diperlihatkan, masih harus dipastikan.

Prosedur penentuan dari kelandaian dan lendutan di A menyangkut: 1) menggunakan Teorema Balok-Terpadu I untuk mendapatkan kelandaian di B , yang adalah reaksi (atau gaya geser) di B dari balok sederhana BD dimuati dengan luas $M/(EI)$; dan 2) mengetrapkan Teorema-teorema Luas-Momen I dan II terhadap segmen-segmen BA untuk mendapatkan kelandaian dan lendutan di A .

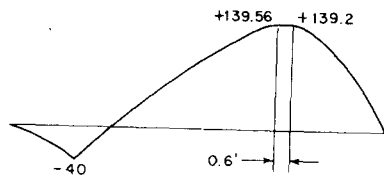
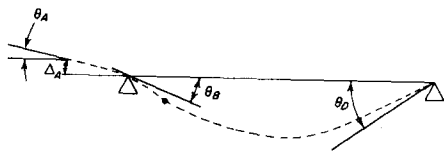
Karena EI adalah konstan, diagram momen dapat dipergunakan secara kualitatif sebagai luas $M/(EI)$ tanpa perubahan. Juga, reaksi di B dari balok terpadu yang sederhana BD dapat diperoleh sebagai jumlah dari tiga bagian yang diperlihatkan dalam Gambar 5.15d; jadi,

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} - \theta_{B3} = R'_{B1} + R'_{B2} - R'_{B3} \\ = \frac{291.2}{EI} + \frac{2000}{3EI} - \frac{800}{3EI} = \frac{691.20}{EI} \text{ k-ft}^2 \text{ searah jarum jam.}$$

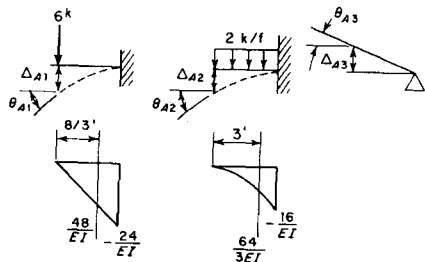
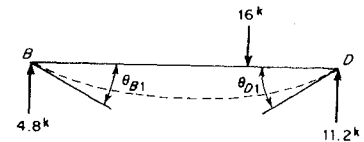
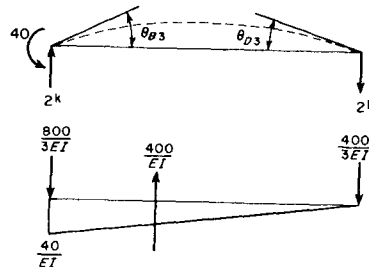
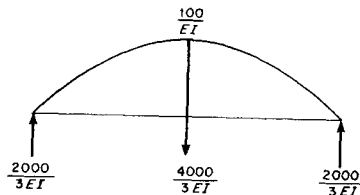
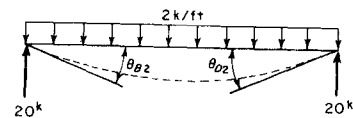
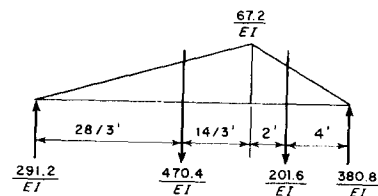
Dengan menerapkan Teorema-teorema Luas-Momen I dan II terhadap segmen BA di mana luas $M/(EI)$ diperlihatkan dalam dua bagian dalam Gambar 5.15e.



(a) Balok yang diketahui

(b) Diagram M untuk Contoh 5.5

(c) Sketsa dari kurva elastik

(e) Memperlakukan AB sebagai sebuah konsol(d) Memperlakukan BD sebagai sebuah balok sederhana

$$\theta_A = \theta_B - \left[\text{luas} \frac{M}{EI} \text{ di atas } BA \right] = \frac{691.20}{EI} - \left[\frac{48}{EI} + \frac{64}{3EI} \right] = \frac{621.87}{EI} \text{ searah jarum jam}$$

$$\Delta_A = \theta_B(4) - [\text{momen dari luas} \frac{M}{EI} \text{ di atas } BA \text{ terhadap } A] \\ = \frac{691.20}{EI}(4) - \left[\frac{48}{EI} \left(\frac{8}{3} \right) + \frac{64}{3EI}(3) \right] = \frac{2572.80}{EI} \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

Perhatikan bahwa θ_B sendiri adalah searah jarum jam, dan sebuah titik berjalan searah jarum jam dari B ke A di atas kurva elastik akan memberikan sisa positif $621,87 \text{ k-ft}^2/(EI)$ searah jarum jam. Sebagai tambahan, perhatikan bahwa putaran searah jarum jam dari garis singgung di titik B melendut titik A ke atas, dan titik berjalan turun dari garis singgung menjalani dari B ke A pada kurva elastik yang membuat sisa positif $2572,80 \text{ k-ft}^3/(EI)$ mengarah ke atas.

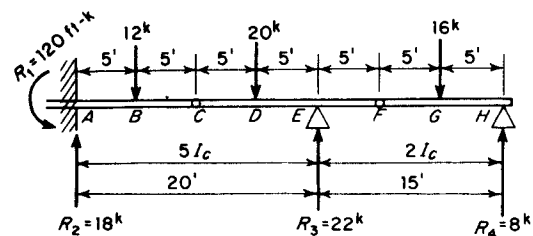
Contoh Soal 5.8. Dengan cara luas momen hitunglah kelandaian dari kurva elastik sebelah kiri di sendi internal F , kelandaian dari kurva elastik sebelah kanan di sendi internal F , dan lendutan vertikal dari sendi internal F dalam balok dari Contoh-contoh soal 5.2, 5.4, dan 5.6. Misalkan momen lembam dari segmen $ABCDE$ adalah $5I_c$ dan dari segmen $EFGH$ adalah $2I_c$.

Penyelesaian. Reaksi-reaksi dan diagram momen diambil dari Contoh-contoh soal 5.2 dan 5.6 dan diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.16a dan b. Berdasarkan diagram momen sebuah sketsa dari kurva elastik yang dibuat dengan tangan, diperlihatkan dalam Gambar 5.16c. Harus ditekankan bahwa kali ini tidak ada kepastian apakah titik F' terletak di atas atau di bawah sumbu balok asli. Apa yang diketahui hanyalah derajat kecekungan atau kecembungan dari kurva sepanjang balok. Dengan perkataan lain, koreksi-koreksi dari sketsa anggapan pertama dari kurva elastik harus terus-menerus dijalankan selama perhitungan-perhitungan berjalan. Catat, bagaimanapun juga, ketidakmungkinan dari kelandaian di titik-titik C' dan F' .

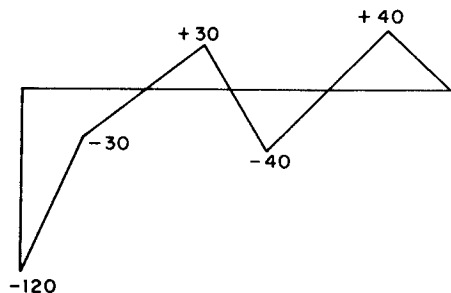
Diagram M yang telah diubah dari Gambar 5.16d diperoleh dengan memampatkan dari diagram M dalam Gambar 5-16b dengan n , di mana nI_c adalah momen lembam. Dengan cara ini diagram M yang telah diubah secara kualitatif akan mewakili luas $U/(EI)$, kecuali pembagi EI_c .

Prosedur dalam menentukan θ_{FL} , θ_{FR} , dan Δ_F seperti diperlihatkan dalam Gambar 5.16c menyangkut: 1) penerapan Teorema Luas-Momen II pada segmen AC untuk mendapatkan Δ_c (Gambar 5.16e); 2) penerapan Teorema Balok-Terpadu I terhadap segmen CE untuk menentukan sudut-sudut antara garis lurus $C'E$ dan kurva elastik di C' dan E (Gambar 5.16f); 3) penerapan kedua teorema luas-momen terhadap segmen EF untuk men-

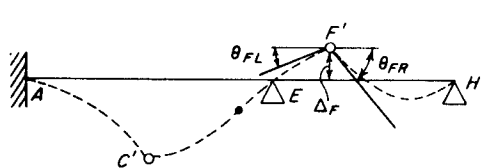
GAMBAR 5.15. Penyelesaian untuk Contoh Soal 5.7.



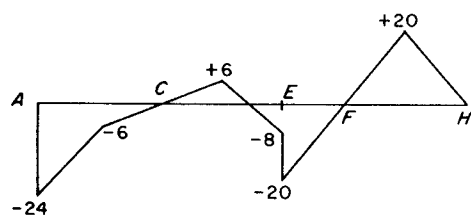
(a) Balok yang diketahui



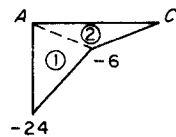
(b) Diagram-M dari Contoh 5.6 (Gambar 5.12)



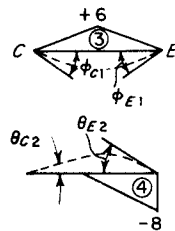
(c) Sketsa dari kurva elastik



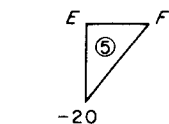
(d) Diagram-M yang dimodifikasi (diubah)



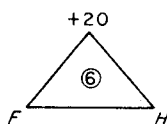
(e) Segmen AC



(f) Segmen CE



(g) Segmen EF



(h) Segmen FH

GAMBAR 5.16. Penyelesaian untuk Contoh Soal 5.8.

dapatkan θ_{FL} dan Δ_F (Gambar 5.16g), dan 4) penerapan Teorema Balok-Terpadu terhadap segmen FH untuk menentukan sudut antara garis lurus $F'H$ dan kurva elastik di F' (Gambar 5.16h). Perhitungan-perhitungan terperinci adalah sebagai berikut:

Untuk segmen AC (Gambar 5.16e),

$$\Delta_c = \frac{1}{EI_c} [\text{momen dari luas-luas (1) dan (2) terhadap } C] \\ = \frac{1}{EI_c} \left[60 \left(5 + \frac{10}{3} \right) + 30(5) \right] = \frac{650}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ ke bawah}$$

Untuk segmen CE (Gambar 5.13f)

$$\phi_c = \phi_{c1} - \phi_{c2} = \frac{1}{EI_c} \left[\frac{1}{2}(30) - \frac{1}{2}(20) \right] = \frac{35}{3EI_c} \text{ k-ft}^2$$

$$\phi_E = \phi_{E2} - \phi_{E1} = \frac{1}{EI_c} \left[\frac{5}{6}(20) - \frac{1}{2}(30) \right] = \frac{5}{3EI_c} \text{ k-ft}^2$$

$$\theta_E = [\text{kelandaian dari garis lurus } C'E] - \phi_E = \frac{1}{10} \Delta_c - \phi_E \\ = \frac{1}{EI_c} \left[65 - \frac{5}{3} \right] = \frac{190}{3EI_c} \text{ k-ft}^2 \text{ berlawanan arah jarum jam}$$

Untuk segmen EF (Gambar 5.16g),

$$\theta_{FL} = \theta_E - \frac{1}{EI_c} [\text{area (5)}] = \frac{1}{EI_c} \left[\frac{190}{3} - 50 \right] \\ = \frac{40}{3EI_c} \text{ k-ft}^2 \text{ berlawanan arah jarum jam (jawaban)}$$

$$\Delta_F = 5\theta_E - \frac{1}{EI_c} [\text{momen dari luas (5) terhadap } F] \\ = \frac{1}{EI_c} \left[5 \left(\frac{190}{3} \right) - 50 \left(\frac{10}{3} \right) \right] = \frac{150}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas (jawaban)}$$

Untuk segmen FH (Gambar 5.13h),

$$\phi_F = \text{reaksi kiri dari balok terpadu sederhana } FH \\ = \frac{1}{EI_c} \left[\frac{1}{2} \text{ dari luas (6)} \right] = \frac{50}{EI_c}$$

$$\text{kelandaian dari garis lurus } F'H = \frac{1}{10} \Delta_F = \frac{15}{EI_c}$$

$$\theta_{FR} = [\text{kelandaian dari } F'H] + \phi_F \\ = \frac{1}{EI_c} [15 + 50] = \frac{65}{EI_c} \text{ k-ft}^2 \text{ searah jarum jam (jawaban)}$$

Perhatikan bahwa notasi θ dipergunakan untuk sudut antara sumbu balok asli dan garis singgung terhadap kurva elastik; dan ϕ dipergunakan un-

tuk sudut antara garis singgung terhadap kurva elastik dan garis lurus yang menghubungkan titik-titik batas.

LATIHAN 5.10

Dengan menggunakan cara luas momen hitunglah kelandaian dan lendutan di titik F pada balok dari Latihan 5.1 (Gambar 5.5). Anggaplah bahwa sepanjang seluruh balok EI adalah konstan.

LATIHAN 5.11

Dengan menggunakan cara luas momen, hitung kelandaian-kelandaian dan lendutan pada sendi internal B pada balok dari Latihan 5.3 (Gambar 5.7). Anggaplah bahwa sepanjang seluruh balok EI adalah konstan.

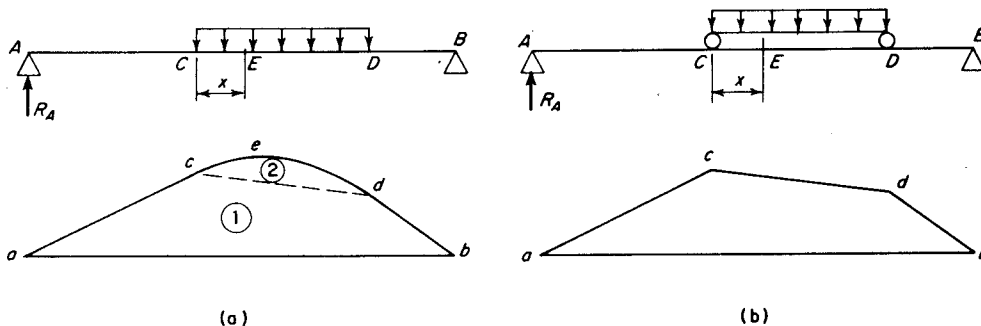
LATIHAN 5.12

Dengan menggunakan cara luas momen, hitung kelandaian-kelandaian dan lendutan pada sendi internal B pada balok dari Latihan 5.3 (Gambar 5.3). Anggaplah bahwa sepanjang seluruh balok EI adalah konstan.

Catatan khusus: Bila muatan terbagi rata tidak meliputi seluruh panjang dari sebuah balok sederhana, diagram yang diperlihatkan dalam Gambar 5.17a adalah jumlah dari luas (1) = $abdca$ dengan sisi-sisi lurus; dan luas (2) = $cdec$ yang identik dengan diagram momen dari sebuah balok sederhana dengan bentang yang sama dengan CD . Hal ini dapat dibuktikan dengan membandingkan persamaan momen untuk sebuah titik E pada balok dari Gambar 5.17a dengan yang pada Gambar 5.17b; jadi

$$M_E(\text{Gambar 5.17a}) = R_A(AC + x) - \frac{wx^2}{2}$$

$$M_E(\text{Gambar 5.17b}) = R_A(AC + x) - \frac{w(CD)}{2}x$$



GAMBAR 5.17. Sifat-sifat Luas Momen.

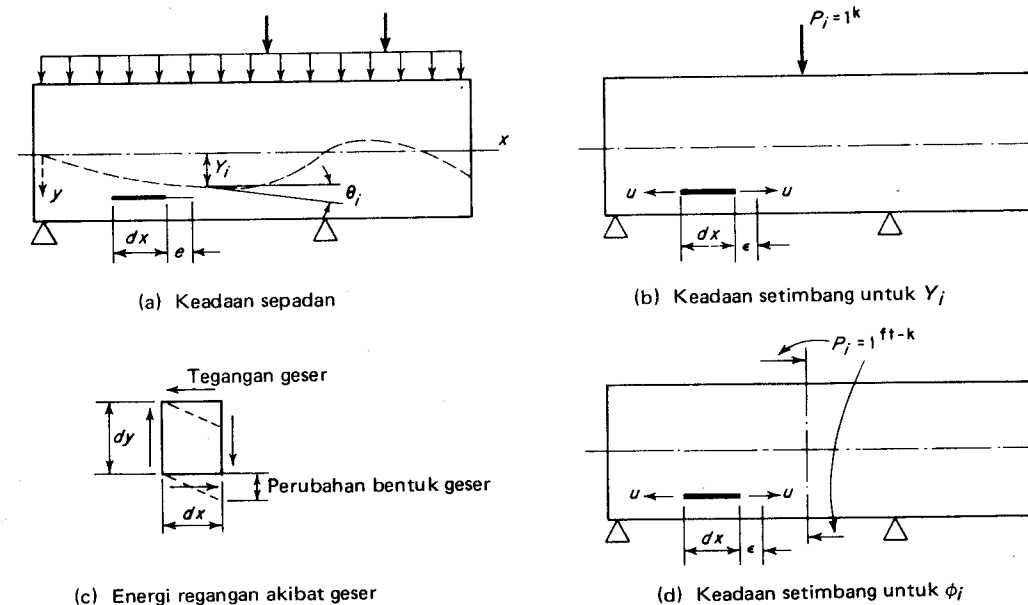
dan

$$M_E(\text{Gambar 5.17a}) - M_E(\text{Gambar 5.17b}) = \frac{w(CD)}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \text{momen dari balok sederhana } CD$$

5.7 Cara Beban-Satuan

Dalam Pasal 3.6 *cara beban-satuan (unit-load method)* untuk mendapatkan perpindahan dari sebuah simpul tertentu pada sebuah rangkaian dengan arah tertentu telah dibicarakan. Penjabarannya adalah berdasarkan Prinsip Kerja Virtual. Dalam bab ini akan dipaparkan penggunaan dari cara satuan-beban untuk mendapatkan lendutan dan kelandaian pada sebuah balok.

Berbeda dengan sebuah rangkaian yang mempunyai sejumlah pegas-pegas ekuivalen (atau batang-batang), sebuah balok dapat dipandang dari pegas-pegas pendek yang dipampatkan, masing-masing dengan panjang dx dalam keadaan asli tetapi adalah $(dx + e)$ dalam keadaan berubah bentuk. Pertambahan panjang e dari pegas-pegas yang sangat pendek ini dapat diakibatkan oleh beban-beban terapan, perubahan suhu, dan variabel-variabel fisik yang lain. Jadi keadaan utuh dari balok dalam Gambar 5.18a mempunyai arti yang sama dengan yang pada rangkaian dalam Gambar 3.15a. Pengaruh dari perubahan bentuk geser terhadap bentuk geometri dari kurva elastik lazimnya adalah kecil (kecuali untuk balok-balok yang dalam lagi pendek) dan tidak akan digarap dalam teks elementer ini.



GAMBAR 5.18. Cara Satuan-Beban.

Sekarang tinjaulah keadaan setimbang dari Gambar 5.18b, atau Gambar 5.18d, di mana beban satuan (sebuah satuan momen adalah beban satuan yang dipandang secara umum) sebesar $P_i = 1$ kip atau $P_i = 1$ ft-kip di setimbangkan oleh gaya-gaya u dalam pegas-pegas yang sangat kecil. Dengan memakai tafsiran kata-kata yang luas dari prinsip Kerja virtual dalam Pasal 3.6, yang menyatakan "kerja eksternal dan kerja internal, masing-masing dilaksanakan oleh gaya dalam "keadaan setimbang" dalam proses perubahan bentuk dari suatu bahan dalam keadaan "sepadan", haruslah sama, maka diperoleh

$$(5.7.1) \quad P_i * Y_i = \Sigma(u)(e)$$

Penjabaran dari Persamaan (5.7.1) adalah lebih rumit dibanding dengan Persamaan (3.6.2) karena di sini tidak ada simpul-simpul yang memegang pada sebuah balok. Akan tetapi, kita dapat menggunakan konsep dari kerja dan energi. Misalkan lendutan dalam arah P_i dalam keadaan setimbang dalam Gambar 5.18b adalah y_i , dan pertambahan panjang dalam pegas-pegas yang sangat kecil dinyatakan dengan e .

Dengan menerapkan beban satuan pertama-tama pada balok yang asli, dengan mengabaikan energi regangan akibat gaya geser, dan dengan menyamakan kerja eksternal terhadap energi regangan akibat tegangan lenturan normal,

$$(5.7.2) \quad \frac{1}{2} P_i * y_i = \Sigma \frac{1}{2} (u)(e)$$

Terhadap balok yang telah dibebani dengan P_i , perubahan bentuk dari keadaan serasi digabungkan. Kerja eksternal tambahan yang dikerjakan oleh P_i adalah $P_i Y_i$ dan energi regangan tambahan adalah $\Sigma(u)(e)$. Dengan menyamakan kerja eksternal jumlah dan energi regangan jumlah,

$$(5.7.3) \quad \frac{1}{2} P_i * y_i + P_i * Y_i = \Sigma \frac{1}{2} (u)(e) + \Sigma(u)(e)$$

Persamaan (5.7.3) dikurangi Persamaan (5.7.2),

$$P_i * Y_i = \Sigma(u)(e)$$

yang adalah Persamaan (5.7.1). Jika pengaruh dari perubahan bentuk geser terhadap bentuk geometri dari kurva elastik dipandang, Persamaan (5.7.1) akan menyertakan sebuah unsur penjumlahan tambahan terhadap energi regangan akibat dari gaya geser.

Bila pertambahan panjang dan pegas-pegas pendek dalam keadaan sepadan adalah akibat dari momen lentur M ,

$$(5.7.4) \quad e = \frac{My}{EI} dx$$

Dengan menggunakan simbol m untuk momen lentur dalam keadaan setimbang,

$$(5.7.5) \quad u = \frac{my}{I} dA$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan-persamaan (5.7.4) dan (5.7.5) ke dalam Persamaan (5.7.1)

$$(5.7.6) \quad P_i * Y_i = \Sigma(u)(e) = \int \int \frac{My}{EI} dx \frac{my}{I} dA = \int \frac{Mmdx}{EI}$$

Secara sama, bila P_i adalah sebuah momen satuan seperti diperlihatkan dalam Gambar 5.18d,

$$(5.7.7) \quad P_i * \theta_i = \int \frac{Mmdx}{EI}$$

Persamaan-persamaan (5.7.6) dan (5.7.7) adalah rumus-rumus kerja untuk menentukan lendutan atau kelayakan pada sebuah titik tertentu di kurva elastik.

Kedua contoh berikut akan memperlihatkan bahwa dengan menggunakan cara beban satuan dan cara luas-momen akan memberikan hasil-hasil yang tepat sama. Pada umumnya, sebuah soal seharusnya diselesaikan dengan cara luas-momen, dan sebuah pemeriksaan dilaksanakan dengan cara beban-satuan.

Contoh Soal 5.9. Selesaikan Contoh 5.7 dengan cara beban-satuan.

Penyelesaian. Reaksi-reaksi dari balok yang diberikan seharusnya dihitung dulu tetapi dalam persoalan ini hasil-hasil reaksi tersebut diambil dari contoh yang terdahulu dan diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.19a. Momen dan beban satuan diterapkan di titik A dan diagram-diagram diperlihatkan berturut-turut dalam Gambar 5.19b dan c.

Persamaan-persamaan momen untuk masing-masing dari ketiga segmen antara penampang-penampang tanpa kemalaran, dan untuk masing-masing dari tiga keadaan setimbang, adalah

1) Segmen AB , mulai di A , dibatasi antara 0 sampai 4:

$$M = -6x - x^2$$

$$m \text{ untuk } \theta_A = -1.0$$

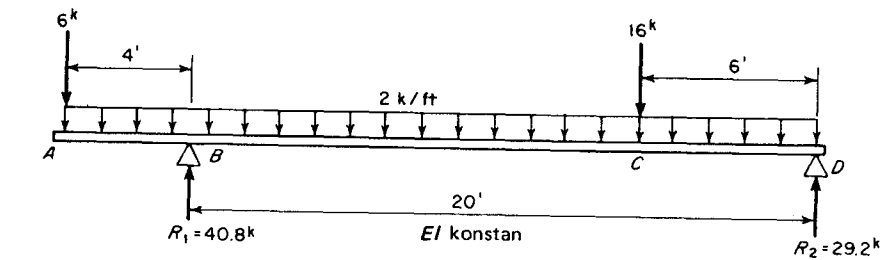
$$m \text{ untuk } \Delta_A = -x$$

2) Segmen BC , mulai di D , dibatasi antara 6 sampai 20,

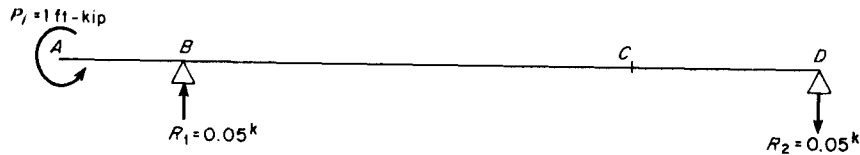
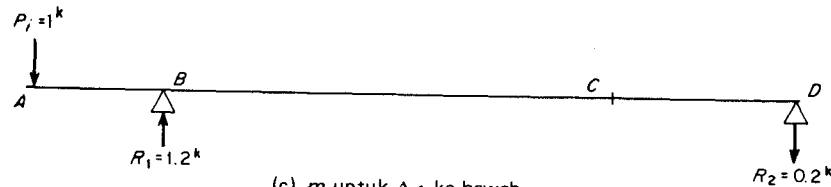
$$M = 29.2x - x^2 - 16(x - 6)$$

$$m \text{ untuk } \theta_A = -0.05x$$

$$m \text{ untuk } \Delta_A = -0.20x$$



(a) Balok yang diketahui

(b) m untuk ϕ_A berlawanan arah jarum jam(c) m untuk Δ_A ke bawah

GAMBAR 5.19. Penyelesaian untuk Contoh Soal 5.9.

1) Segmen CD , mulai di D , dibatasi dari 0 sampai 6,

$$M = 29.2x - x^2$$

$$m \text{ untuk } \theta_A = -0.05x$$

$$m \text{ untuk } \Delta_A = -0.20x$$

Dengan menerapkan rumus-rumus kerja (5.7.6) dan (5.7.7) pada cara beban-satuan,

$$110_1 = \int (M)(m \text{ untuk } \theta_A) dx$$

$$= \int_0^4 (-6x - x^2)(-1.0) dx + \int_6^{20} [29.2x - x^2 - 16(x - 6)](-0.05x) dx \\ + \int_0^6 (29.2x - x^2)(-0.05x) dx$$

$$= (+69.33) + (-88.92) + (-602.28) = -621.87$$

$$\theta_A = \frac{621.87}{EI} \text{ k-ft}^2 \text{ searah jarum jam}$$

$$EI\Delta_A = \int (M)(m \text{ untuk } \Delta_A) dx$$

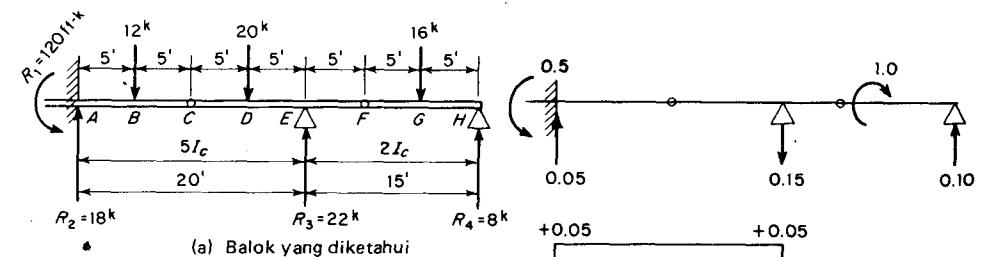
$$= \int_0^4 (-6x - x^2)(-x) dx + \int_6^{20} [29.2 - x^2 - 16(x - 6)](-0.20x) dx \\ + \int_0^6 (29.2x - x^2)(-0.20x) dx$$

$$= (+192) + (-355.68) + (-2409.12) = -2572.8$$

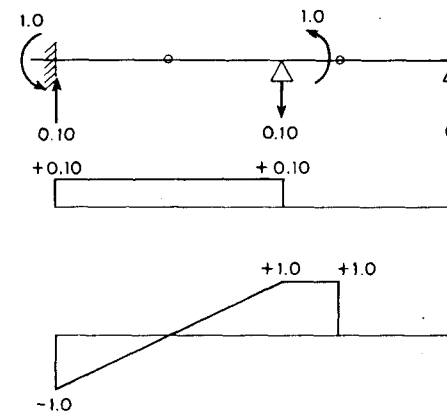
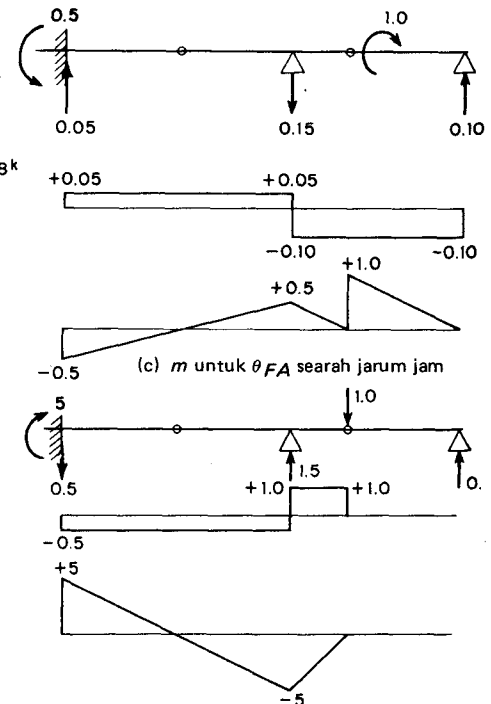
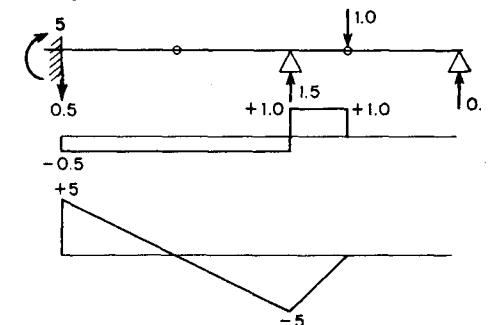
$$\Delta_A = \frac{2572.8}{EI} \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

Contoh Soal 5.10. Selesaikan Contoh Soal 5.8 dengan cara beban-satuan.

Penyelesaian. Reaksi-reaksi R_1 dan R_4 dari balok yang diketahui harus dihitung dulu, tetapi dalam persoalan ini reaksi-reaksi tersebut diambil dari contoh sebelumnya dan diperlihatkan lagi dalam Gambar 5.20a. De-



(a) Balok yang diketahui

(b) m untuk θ_F berlawanan arah jarum jam(c) m untuk θ_{FA} searah jarum jam

GAMBAR 5.20 Contoh untuk Soal 5.10.

ngan menggunakan notasi-notasi θ_{FI} dan θ_{FA} , berturut-turut untuk kelandaian-kelandaian di F pada kurva elastik di sebelah kiri dan kanan dari F , momen-momen satuan diterapkan seperti dalam Gambar 5.20b dan c. Sama halnya, beban satuan diterapkan di F dalam Gambar 5.20d untuk mendapatkan lendutan Δ_F di F .

Dalam tiap persoalan dari Gambar 5.20b, c, dan d, reaksi-reaksi dihitung dengan berturut-turut menggunakan segmen-segmen FGH , $CDEF$, dan ABC sebagai bagian-bagian lepas. Diagram-diagram gaya geser dan momen diperlihatkan sebagai alat untuk memeriksa. Persamaan-persamaan momen untuk masing-masing dari keenam segmen di antara penampang-penampang tidak malar adalah

Segmen	n	Titik mula	Batas-batas	M	m untuk θ_{FL}	m untuk θ_{FR}	u untuk Δ_F
AB	5	A	0 sampai 5	$-120 + 18x$	$-1 + 0.10x$	$-0.5 + 0.05x$	$+5 - 0.50x$
BCD	5	A	5 sampai 15	$-120 + 18x - 12(x - 5)$	$-1 + 0.10x$	$-0.5 + 0.05x$	$+5 - 0.50x$
DE	5	A	15 sampai 20	$-120 + 18x - 12(x - 5) - 20(x - 15)$	$-1 + 0.10x$	$-0.5 + 0.05x$	$+5 - 0.50x$
EF	2	H	10 sampai 15	$8x - 16(x - 5)$	$+1$	$-1 + 0.10x$	$-(x - 10)$
FG	2	H	5 sampai 10	$8x - 16(x - 5)$	0	$+0.10x$	0
GH	2	H	0 sampai 5	$8x$	0	$+0.10x$	0

Dengan menerapkan rumus-rumus kerja (5.7.6) dan (5.7.7) pada cara beban-satuan,

$$\begin{aligned}
 EI_c \theta_{FL} &= \frac{1}{3} \int_0^5 (-120 + 18x)(-1 + 0.10x) dx \\
 &+ \frac{1}{3} \int_5^{15} [-120 + 18x - 12(x - 5)](-1 + 0.10x) dx \\
 &+ \frac{1}{3} \int_{15}^{20} [-120 + 18x - 12(x - 5) - 20(x - 15)](-1 + 0.10x) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{10}^{15} [8x - 16(x - 5)](+1) dx \\
 &= (+60) + (+10) + (-\frac{20}{3}) + (-50) = +\frac{40}{3} \\
 \theta_{FL} &= \frac{40}{3EI_c} \text{ k-ft}^2 \text{ berlawanan arah jarum jam}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI_c \theta_{FR} &= \frac{1}{3} \int_0^5 (-120 + 18x)(-0.5 + 0.05x) dx \\
 &+ \frac{1}{3} \int_5^{15} [-120 + 18x - 12(x - 5)](-0.5 + 0.05x) dx \\
 &+ \frac{1}{3} \int_{15}^{20} [-120 + 18x - 12(x - 5) - 20(x - 15)](-0.5 + 0.05x) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{10}^{15} [8x - 16(x - 5)](-1 + 0.10x) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_5^{10} [8x - 16(x - 5)](+0.10x) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^5 (8x)(+0.10x) dx \\
 &= (+30) + (+5) + (-\frac{10}{3}) + (-\frac{50}{3}) + (+\frac{100}{3}) + (+\frac{50}{3}) = +65
 \end{aligned}$$

$$\theta_{FR} = \frac{65}{EI_c} \text{ k-ft}^2 \text{ searah jarum jam}$$

$$\begin{aligned}
 EI_c \Delta_F &= \frac{1}{3} \int_0^5 (-120 + 18x)(+5 - 0.50x) dx \\
 &+ \frac{1}{3} \int_5^{15} [-120 + 18x - 12(x - 5)](+5 - 0.50x) dx \\
 &+ \frac{1}{3} \int_{15}^{20} [-120 + 18x - 12(x - 5) - 20(x - 15)](+5 - 0.50x) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{10}^{15} [8x - 16(x - 5)](-(x - 10)) dx \\
 &= (-300) + (-50) + (+\frac{100}{3}) + (+\frac{500}{3}) = -150 \\
 \Delta_F &= \frac{150}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}
 \end{aligned}$$

LATIHAN 5.13

Selesaikan Latihan 5.10 dengan menggunakan cara beban-satuan.

LATIHAN 5.14

Selesaikan Latihan 5.11 dengan menggunakan cara beban-satuan.

LATIHAN 5.15

Selesaikan Latihan 5.12 dengan menggunakan cara beban-satuan.

5.8 Catatan Penutup

Penekanan dari bab ini adalah pada evaluasi kuantitatif dari diagram-diagram gaya geser dan momen juga terhadap sifat-sifat dari kurva elastik dari balok-balok statik tertentu. Akan diperlihatkan pada bab-bab berikutnya bahwa bahan ini adalah dasar untuk mendapatkan keterangan di titik-titik di dalam tiap bentang dari sebuah balok malar statik tidak tertentu atau ujung-ujung dari tiap batang kaku statik tidak tertentu. Alasan untuk ini adalah bahwa apakah dipergunakan cara gaya ataupun cara perpindahan, maka hanya gaya-gaya atau momen-momen pada ujung tiap bentang atau batang yang tertentu dalam analisis struktur statik tidak tertentu sebagai suatu keseluruhan.

Cara luas momen dan cara beban-satuan telah dikupas secara umum dan dua buah contoh dengan angka diberikan. Para mahasiswa dianjurkan untuk berlatih lebih lanjut dengan dua cara ini dengan menyelesaikan lendutan-lendutan dan kelandaian-kelandaian pada balok-balok biasa yang khas seperti misalnya balok-balok sederhana dengan muatan terbagi rata atau dengan sebuah muatan terpusat pada pertengahan bentang; atau balok-balok konsol dengan muatan terbagi rata atau dengan sebuah muatan terpusat pada ujung-ujung bebasnya.

Balok-balok Statik Tidak Tertentu

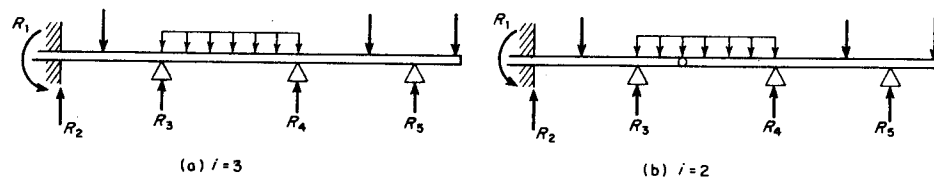
6

6.1 Derajat Ketidaktertentuan

Derajat ketidaktertentuan dari sebuah balok statik tidak tertentu adalah sama dengan jumlah dari reaksi-reaksi eksternal dikurangi dua bila tidak terdapat sendi-sendi internal. Hal tersebut di atas dapat dinyatakan sesuai dengan kenyataan bahwa ilmu statika hanya memberikan dua persamaan mandiri (independent) untuk kesetimbangan dari suatu sistem gaya-gaya sejajar yang sebidang. Kadang-kadang, sendi-sendi internal yang sesungguhnya dapat dipasang dalam balok-balok malar demi alasan-alasan perencanaan (meskipun kejadian semacam itu lebih sering ditemui dalam tahapan menengah dari analisis batas), oleh karena itu, derajat ketidaktertentuan dikurangi dengan satu untuk setiap sendi internal. Jadi, sebuah ungkapan umum untuk derajat ketidak tertentu dari sebuah balok statik tidak tertentu adalah

$$(6.1.1) \quad i = NR - NIH - 2$$

di mana NR dan NIH berturut-turut adalah jumlah dari reaksi-reaksi dan sendi-sendi internal. Sebagai sebuah contoh yang khas, derajat ketidaktertentuan dari balok dalam Gambar 6.1a adalah tiga, tetapi yang dalam Gambar 6.1b adalah dua.



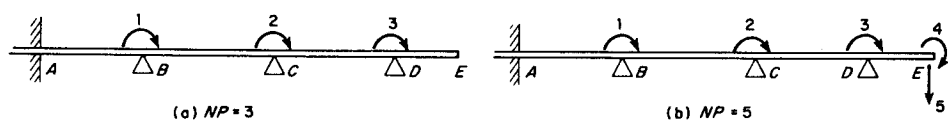
GAMBAR 6.1. Balok-balok Statik Tidak Tertentu.

6.2 Derajat Kebebasan

Sebuah balok, baik statik tertentu maupun tidak tertentu, dapat dipisahkan menjadi sejumlah batang-batang terbatas pada titik-titik yang disebut *simpul-simpul (joint)*. Untuk kepentingan analisa, setiap titik di mana terdapat baik sebuah reaksi yang tidak diketahui maupun sebuah sendi internal harus dianggap sebagai sebuah simpul. Maka, jumlah minimum dari simpul-simpul pada balok dalam Gambar 6.1a adalah empat, tetapi dalam Gambar 6.1b adalah lima. Simpul-simpul tambahan dapat dipandang sebagai terletak di sebarang tempat sepanjang balok tersebut, setiap simpul akan menambah jumlah dari batang-batang dengan satu.

Sebuah simpul dalam sebuah balok dapat mati terhadap perputaran, seperti halnya pada konstruksi ujung yang menyatu, atau bebas untuk berputar bila dimuati. Selanjutnya, simpul tersebut dapat bertahan terhadap perpindahan ke arah mendatar, seperti halnya pada sebuah penyangga, atau bebas untuk melendut kalau mendapat pembebanan. Jadi, derajat kebebasan yang lazim pada sebuah simpul dalam sebuah balok adalah dua, kecuali pada sebuah sendi internal di mana terdapat tiga atau dua perputaran yang tidak dikenal sebagai ganti dari satu perputaran yang lazim.

Derajat kebebasan untuk sebuah balok seluruhnya adalah jumlah dari perputaran-perputaran yang tidak diketahui dan perpindahan-perpindahan mendatar pada semua simpul-simpulnya. Karena simpul-simpul yang jumlahnya berlebihan dapat ditambahkan dalam setiap analisis, maka derajat kebebasan NP adalah fungsi dari jumlah sendi-sendi NJ . Jadi untuk balok dalam Gambar 6.2, bila titik E tidak dianggap sebagai sebuah simpul, seperti dalam Gambar 6.2a, maka derajat kebebasan NP adalah tiga; tetapi jika



GAMBAR 6.2. Derajat Kebebasan dari sebuah Balok.

titik E dianggap sebagai sebuah simpul, seperti dalam Gambar 6.2b, maka NP menjadi lima.

Akan diperlihatkan kemudian bahwa jika dalam analisis dipergunakan komputer pemilihan dari letak-letak simpul dan hasil dari derajat kebebasan tergantung dari informasi yang diperlukan dalam keluaran komputer.

6.3 Cara Gaya dan Cara Perpindahan

Konsep dari cara gaya dan cara perpindahan, yang sudah dibahas dalam Bab 4 sehubungan dengan rangka, berlaku sama terhadap analisis balok.

Cara gaya hanya dapat dihubungkan dengan analisis dari balok-balok statik tidak tertentu gaya-gaya kelebihan, dengan jumlah sama dengan derajat ketidaktertentuan, diambil sebagai unsur-unsur utama yang tidak diketahui dan ditentukan dulu sedemikian rupa dengan menggunakan persyaratan-persyaratan kesepadanan dalam arah-arah dari kelebihan-kelebihan tersebut. Kelebihan-kelebihan yang terpilih tersebut mungkin hanya terdiri dari reaksi-reaksi eksternal saja, momen-momen lentur pada penyangga-penyangga saja, atau dari kombinasi dari keduanya. Cara pertama merupakan cara yang lazim dipergunakan; kenyataannya, cara kedua adalah merupakan dasar dari *persamaan tiga momen (three-moment equation)* yang terkenal.

Cara perpindahan dapat digunakan untuk menganalisis baik balok statik tertentu maupun balok statik tidak tertentu. Dalam cara ini, perpindahan-perpindahan simpul yang jumlahnya sama dengan derajat kebebasan diambil sebagai unsur-unsur utama yang tidak diketahui dan pertama-tama ditentukan sedemikian rupa, dengan menggunakan persyaratan-persyaratan kesetimbangan dalam arah-arah dari perpindahan simpul yang belum diketahui. Bila digunakan persamaan aljabar konvensional dengan penjabaran tangan, cara ini dikenal sebagai *cara lendutan-kelandaian (slope-deflection method)*. Akan tetapi, jika notasi-notasi matriks dipakai dalam formulasinya, cara ini akhir-akhir ini lebih dikenal sebagai *cara perpindahan matriks (matrix-displacement method)*. Yang terakhir ini menjadi sangat penting karena operasi-operasi matriksnya dapat secara mudah diproses dengan komputer digital. *Cara distribusi-momen (moment-distribution method)* yang dikembangkan oleh Profesor Hardy Cross* terutama menyangkut penyelesaian dari persamaan-persamaan simultan yang berasal dari metode lendutan-kelandaian dengan sebuah prosedur relaksasi.

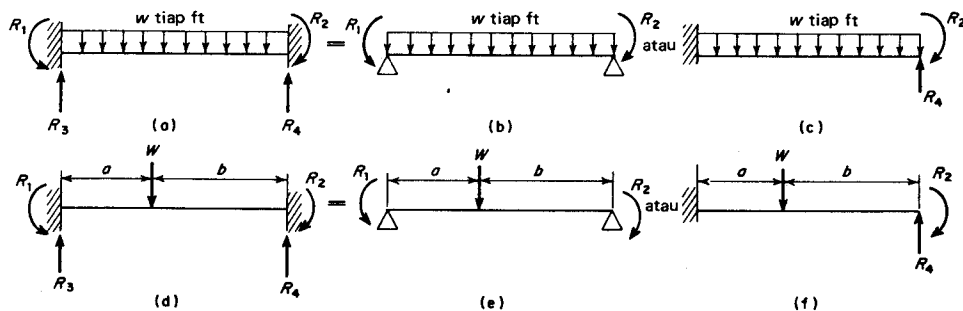
* Hardy Cross: "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments," *Transactions, ASCE*, 1932.

Sisa bab ini akan menyuguhkan secara terperinci dua cara gaya dan tiga cara perpindahan yang telah diperkenalkan di sini.

6.4 Cara Gaya—Reaksi-reaksi Sebagai Gaya-gaya Kelebihan

Bila gaya-gaya kelebihan yang dipilih dalam cara analisis gaya adalah reaksi-reaksi, penahan-penahan fisik yang berhubungan dengan reaksi-reaksi sisa harus dihilangkan dan balok asli diganti dengan sebuah balok statik tertentu dengan "derajat yang lebih rendah" yang menahan beban-beban yang diterapkan dan gaya-gaya reaksi kelebihan. Sebagai contoh, balok yang ujung-ujungnya terjepit dari Gambar 6.3a atau d dapat dianggap sebagai sebuah balok sederhana dengan derajat lebih rendah balok dari Gambar 6.3b atau e, atau sebagai sebuah balok konsol dengan derajat lebih rendah dari Gambar 6.3c atau f. Karena sebuah balok sederhana secara struktur lebih mudah diamati dari sebuah balok konsol, maka pilihan pertama akan menghasilkan persamaan-persamaan simultan dalam keadaan yang lebih baik dalam sebuah penyelesaian dengan angka-angka.

Gaya-gaya reaksi kelebihan ditentukan pertama-tama berdasarkan kenyataan bahwa perpindahan-perpindahan putar atau geser dalam arah-arrah gaya kelebihan haruslah nol. Jadi, dalam kejadian dari Gambar 6.3b atau e, R_1 dan R_2 haruslah sedemikian rupa bahwa keduanya bersama dengan beban-beban yang diterapkan, akan menyebabkan kelandaian-kelandaian nol pada kedua ujung dari balok sederhana; tetapi dalam kejadian dari Gambar 6.3c atau f, R_2 dan R_4 haruslah sedemikian rupa bahwa keduanya bersama-sama dengan beban-beban yang diterapkan, akan menyebabkan kelandaian nol dan lendutan nol pada ujung bebas dari konsol.



GAMBAR 6.3. Reaksi-reaksi dari Gaya-gaya Kelebihan.

Setelah gaya-gaya reaksi kelebihan diperoleh, reaksi-reaksi lainnya ditentukan dari persyaratan-persyaratan statika dan diagram-diagram gaya geser dan momen dari balok yang asli dapat diperoleh.

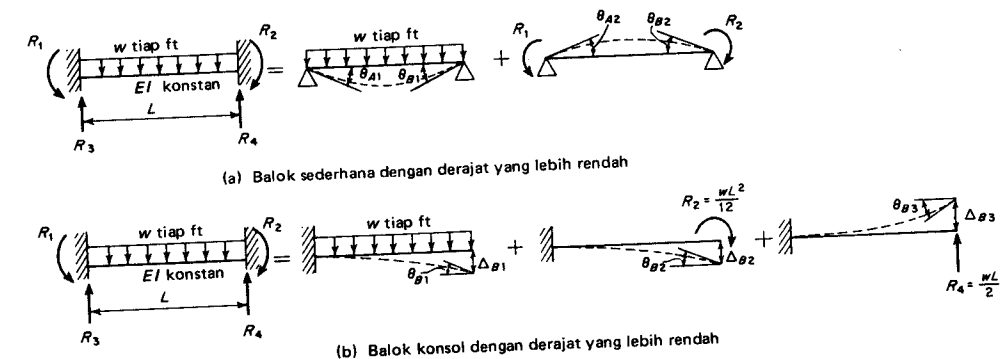
Umumnya, sebuah penyelesaian pertama-tama dapat diperoleh dengan menggunakan sekumpulan gaya-gaya kelebihan yang tepat, dan sebuah pemeriksaan kemudian dilakukan untuk mendapat kepastian bahwa persyaratan-persyaratan kesepadanan memuaskan dalam sebuah balok dengan derajat yang lebih rendah yang berbeda. Dalam kejadian pada balok yang ujung-ujungnya terjepit, R_1 dan R_2 dalam Gambar 6.3a atau d dapat diperoleh pertama-tama dengan menggunakan balok sederhana dengan derajat yang lebih rendah, dan sebuah pemeriksaan dilakukan dengan memastikan bahwa R_2 dan R_1 akan menyebabkan kelandaian dan lendutan nol pada ujung bebas dari balok konsol dengan derajat lebih rendah.

Contoh Soal 6.1. Selesaikan reaksi-reaksi dari sebuah balok yang terjepit ujung-ujungnya yang menahan beban terbagi rata dengan menggunakan balok sederhana dengan derajat lebih rendah, dan periksa penyelesaian tersebut dengan menggunakan sebuah konsol dengan derajat yang lebih rendah.

Penyelesaian

(a) Carilah penyelesaian dari balok sederhana dengan derajat yang lebih rendah (Gambar 6.4a). Akibat dari simetri, maka dapat diketahui lebih dahulu bahwa R_1 dan R_2 adalah sama. Berdasarkan cara balok terpadu,

$$\theta_A = \theta_{A1} - \theta_{A2} = \frac{wL^3}{24EI} - \frac{(R_1 \text{ atau } R_2)L}{2EI} = 0$$



GAMBAR 6.4. Sebuah Balok dengan Ujung-ujung terjepit Menahan Beban Terbagi rata.

diperoleh

$$R_1 \text{ atau } R_2 = \frac{wL^2}{12}$$

Berdasarkan simetri,

$$R_3 \text{ atau } R_4 = \frac{wL}{2}$$

(b) Periksa penyelesaian dengan jalan balok konsol dengan derajat yang lebih rendah (Gambar 6.4b). Dengan cara balok terpadu,

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} - \theta_{B3} = \frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{12EI} - \frac{wL^3}{4EI} = 0 \quad (\text{periksa})$$

$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} - \Delta_{B3} = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{wL^4}{24EI} - \frac{wL^4}{6EI} = 0 \quad (\text{periksa})$$

Contoh Soal 6.2. Selesaikan untuk reaksi-reaksi dari sebuah balok dengan ujung-ujung terjepit yang menahan sebuah beban terpusat dengan menggunakan sebuah balok sederhana dengan derajat lebih rendah dan periksa penyelesaiannya dengan menggunakan sebuah balok konsol dengan derajat lebih rendah.

Penyelesaian

(a) Dapatkan penyelesaian dari balok sederhana dengan derajat lebih rendah (Gambar 6.5a). Dengan cara balok-gabungan,

$$\theta_A = \theta_{A1} - \theta_{A2} - \theta_{A3} = \frac{Wab}{2EI} \left(\frac{L+b}{3L} \right) - \frac{R_1 L}{2EI} \left(\frac{2}{3} \right) - \frac{R_2 L}{2EI} \left(\frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} - \theta_{B3} = \frac{Wab}{2EI} \left(\frac{L+a}{3L} \right) - \frac{R_1 L}{2EI} \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{R_2 L}{2EI} \left(\frac{2}{3} \right) = 0$$

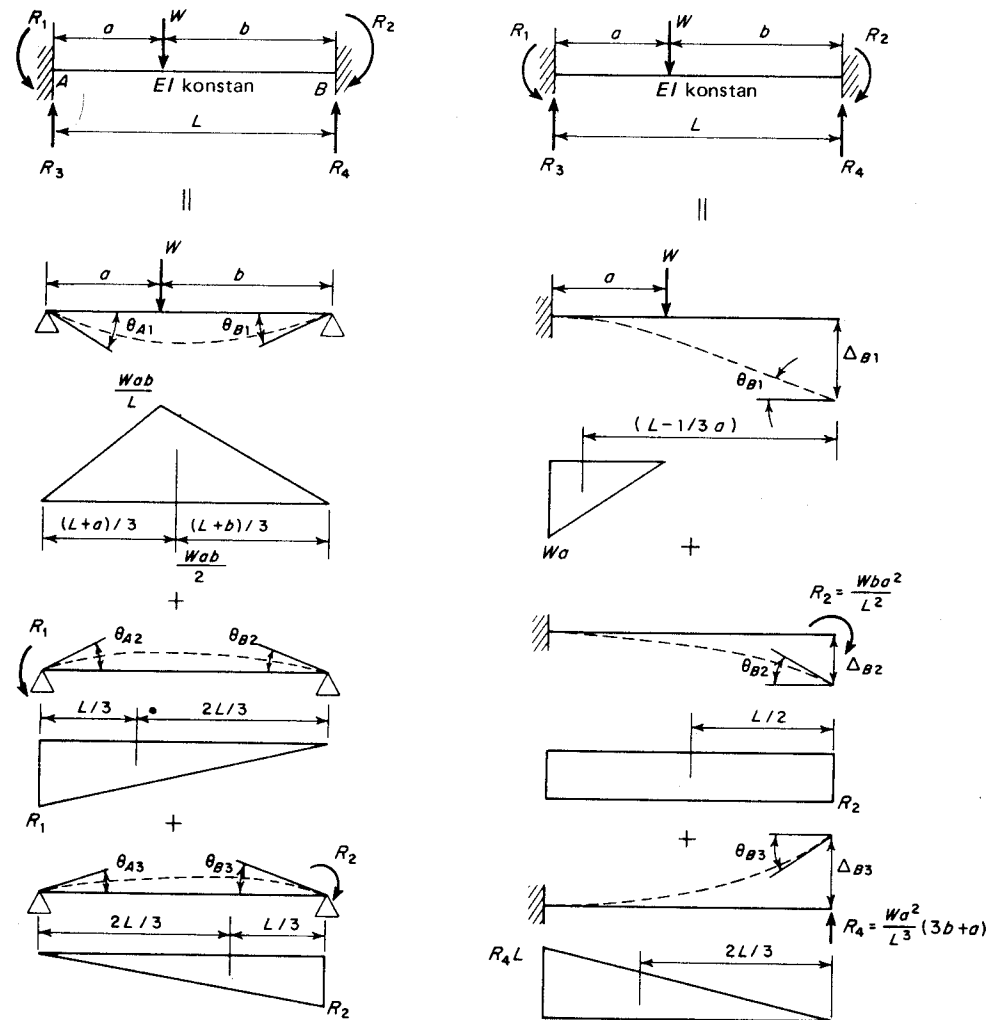
Dengan menyelesaikan kedua persamaan simultan tersebut di atas,

$$R_1 = \frac{Wab^2}{L^2} \quad R_2 = \frac{Wba^2}{L^2}$$

Dari kedua persamaan statika,

$$R_3 = \frac{Wb}{L} + \frac{R_1 - R_2}{L} = \frac{Wb^2}{L^3} (3a + b)$$

$$R_4 = \frac{Wa}{L} - \frac{R_1 - R_2}{L} = \frac{Wa^2}{L^3} (3b + a)$$



(a) Balok sederhana dengan derajat yang lebih rendah

(b) Balok konsol dengan derajat yang lebih rendah

GAMBAR 6.5. Sebuah Balok dengan Ujung-ujungnya terjepit Menahan sebuah Beban Terpusat.

(b) Periksa penyelesaian dengan jalan balok konsol dengan derajat lebih rendah (Gambar 6.5b). Berdasarkan cara luas-momen,

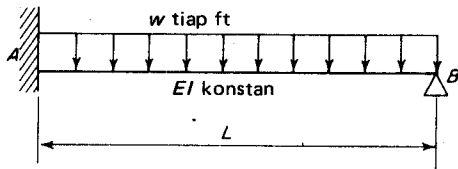
$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_{B1} + \theta_{B2} - \theta_{B3} = \frac{Wa^2}{2EI} + \frac{R_2 L}{EI} - \frac{R_4 L^2}{2EI} = \frac{Wa^2}{2EI} + \frac{Wba^2}{L EI} - \frac{Wa^3(3b+a)}{2L EI} \\ &= \frac{W}{2L EI} (La^2 + 2a^2b - 3a^2b - a^3) = 0 \quad (\text{periksa}) \end{aligned}$$

$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} - \Delta_{B3} = \frac{Wa^2}{2EI} \left(L - \frac{1}{3}a \right) + \frac{Wba^2}{L EI} \left(\frac{L}{2} \right) - \frac{Wa^2(3b+a)}{2L EI} \left(\frac{2}{3}L \right)$$

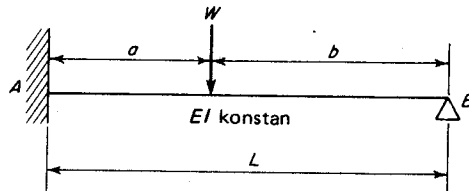
$$= \frac{W}{6EI} (3La^2 - a^3 + 3a^2b - 6a^2b - 2a^3) = 0 \quad (\text{periksa})$$

LATIHAN-LATIHAN 6.1 dan 6.2

Selesaikan untuk reaksi-reaksi dari balok-balok seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.6 dan 6.7 dengan menggunakan sebuah balok sederhana dengan derajat yang lebih rendah dan periksa penyelesaian tersebut dengan sebuah balok konsol dengan derajat yang lebih rendah.



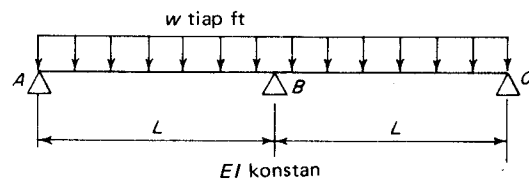
GAMBAR 6.6. Latihan 6.1.



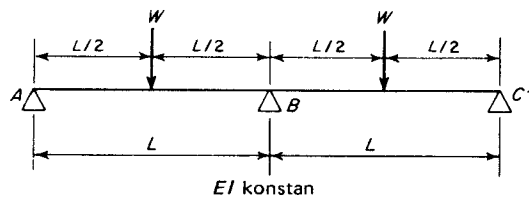
GAMBAR 6.7. Latihan 6.2.

LATIHAN-LATIHAN 6.3 dan 6.4

Selesaikan untuk reaksi-reaksi dari balok-balok seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.8 dan 6.7 dengan menggunakan sebuah balok sederhana dengan derajat yang lebih rendah yang disangga di A dan C, dan periksa penyelesaian tersebut dengan menggunakan sebuah balok konsol malar dengan derajat yang lebih rendah yang disangga di A dan B.



GAMBAR 6.8. Latihan 6.3.



GAMBAR 6.9. Latihan 6.4.

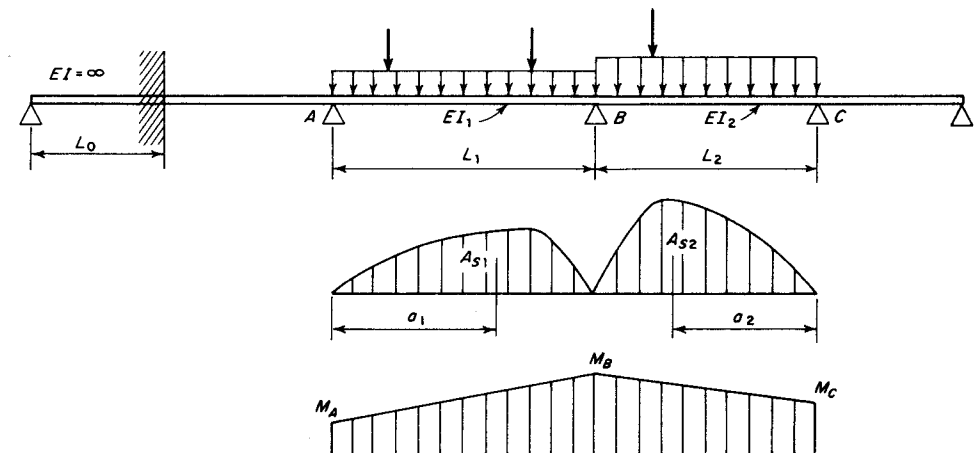
6.5 Cara Gaya—Persamaan Tiga Momen

Bila momen-momen lentur pada penyangga-penyangga dari sebuah balok malar dipergunakan sebagai momen-momen kelebihan, keadaan-keadaan sepadan adalah keadaan kemalaran pada penyangga-penyangga: *Kelandaian dari kurva elastik pada ujung kanan dari bentang kiri haruslah sama dengan kelandaian pada ujung kiri dari bentang kanan.*

Tinjau dua bentang AB dan BC yang berdekatan dalam Gambar 6.10. Tiap bentang, bila dianggap sebagai sebuah bagian lepas yang terpisah, menahan beban yang diterapkan di bentang dan momen-momen lentur pada ujung-ujungnya. Diagram momen akibat beban pada bentang adalah sama dengan bila beban diterapkan pada balok sederhana, seperti A_{s1} dan A_{s2} dalam Gambar 6.10. Jarak-jarak a_1 dan a_2 diukur dari titik-titik berat dari diagram-diagram momen lentur dari balok sederhana terhadap masing-masing penyangga A dan C. Momen-momen lentur pada ujung-ujung dari tiap bentang adalah merupakan momen-momen kelebihan yang tidak diketahui; dan sedemikian rupa sehingga momen-momen tersebut dianggap positif, yang menyebabkan variasi dari M_A terhadap M_B dalam bentang AB dan M_B terhadap M_C dalam bentang BC. Hal ini diperagakan dalam Gambar 6.10.

Kelandaian yang berlawanan dengan arah jarum jam pada ujung kanan dari bentang AB adalah reaksi balok sederhana terpadu AB; atau

$$(6.5.1) \quad [\theta \text{ di titik } B \text{ dari bentang } BC] = \frac{A_{s1} a_1}{EI_1 L_1} + \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1}$$



GAMBAR 6.10. Persamaan Tiga-Momen.

Sama halnya, kelandaian searah jarum jam dari ujung kini dari bentang BC adalah

$$(6.5.2) [\theta \text{ di titik } B \text{ dari bentang } BC] = \frac{A_{s2} a_2}{EI_2 L_2} + \frac{M_B L_2}{3EI_2} + \frac{M_C L_2}{6EI_2}$$

Untuk kemalaran dari kelandaian pada penyangga antara B , Persamaan (6.5.1) harus sama dengan negatif dari Persamaan (6.5.2); jadi

$$(6.5.3) M_A \left(\frac{L_1}{6EI_1} \right) + M_B \left(\frac{L_1}{3EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} \right) + M_C \left(\frac{L_2}{6EI_2} \right) = -\frac{A_{s1} a_1}{EI_1 L_1} - \frac{A_{s2} a_2}{EI_2 L_2}$$

Persamaan (6.5.3) disebut sebagai *persamaan-tiga momen* karena merupakan persyaratan kesepadanan yang menghubungkan tiga buah momen lentur pada tiga penyangga yang berdekatan pada sebuah balok malar.

Bila ada sebuah penyangga jepit interior, sebuah bentang semu dengan panjang L_0 sebarang tetapi dengan kekakuan lentur yang tak berhingga ($EI = \infty$), dapat ditambahkan pada penyangga jepit, seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.10. Dengan cara ini, selalu ada persamaan-persamaan tiga sendi yang jumlahnya adalah sebanyak momen lentur yang tak diketahui pada penyangga-penyangga.

Contoh Soal 6.3. Analisis balok malar diperlihatkan dalam Gambar 6.11 dengan menggunakan persamaan tiga momen.

Penyelesaian. Balok yang diketahui adalah statik tidak tertentu derajat kedua. Bila momen-momen lentur di A dan B dipergunakan sebagai momen-momen kelebihan, keadaan sepadan adalah kemalaran dari kurva elastik di A dan B . Dengan menambah bentang khayal melampaui penyangga jepit A , dua persamaan-persamaan "tiga momen" (6.5.3) dapat ditulis, pertama untuk bentang-bentang A_0A dan AB , dan kemudian untuk bentang-bentang AB dan BC . Momen lentur di C adalah negatif dan nilainya adalah $-36,0$ ft-kips.

Persamaan tiga-momen untuk bentang-bentang A_0A dan AB adalah

$$M_{A_0} \left[\frac{L_0}{6(\infty)} \right] + M_A \left[\frac{L_0}{3(\infty)} + \frac{16}{3E(2I_C)} \right] + M_B \left[\frac{16}{6E(2I_C)} \right] = -\frac{720(26/3)}{E(2I_C)(16)} - \frac{307.2(8)}{E(2I_C)(16)}$$

dan untuk bentang-bentang AB dan BC adalah

$$M_A \left[\frac{16}{6E(2I_C)} \right] + M_B \left[\frac{16}{3E(2I_C)} + \frac{24}{3E(5I_C)} \right] + M_C \left[\frac{24}{6E(5I_C)} \right] = -\frac{720(22/3)}{E(2I_C)(16)} - \frac{307.2(8)}{E(2I_C)(16)} - \frac{2304(12)}{E(5I_C)(24)}$$

Mengingat bahwa tiap angka yang dibagi dengan tak berhingga adalah nol dan menghapuskan EI_C dari penyebut dalam tiap ruas, persamaan di atas menjadi

$$M_A \left[\frac{8}{3} \right] + M_B \left[\frac{4}{3} \right] = -271.8$$

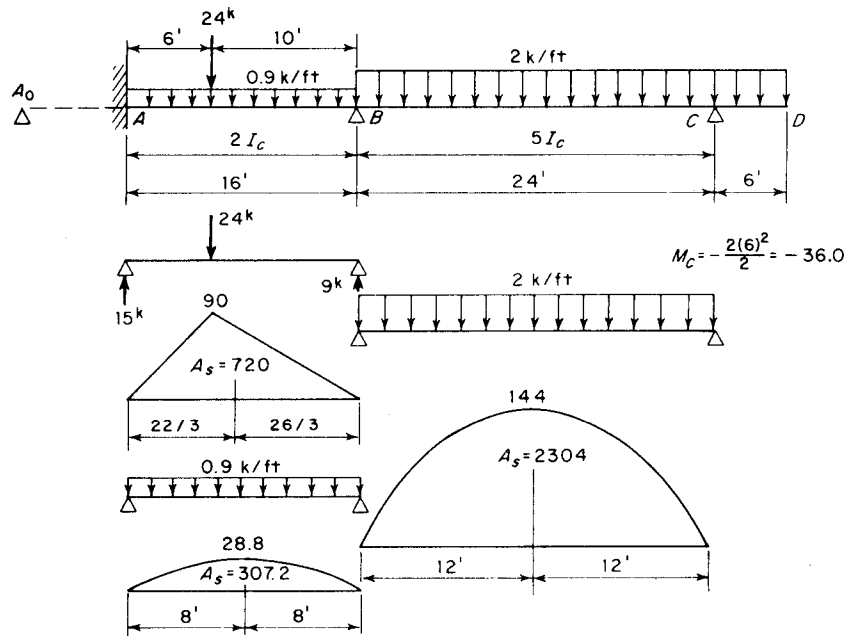
$$M_A \left[\frac{4}{3} \right] + M_B \left[\frac{64}{15} \right] = -443.4$$

Penyelesaian,

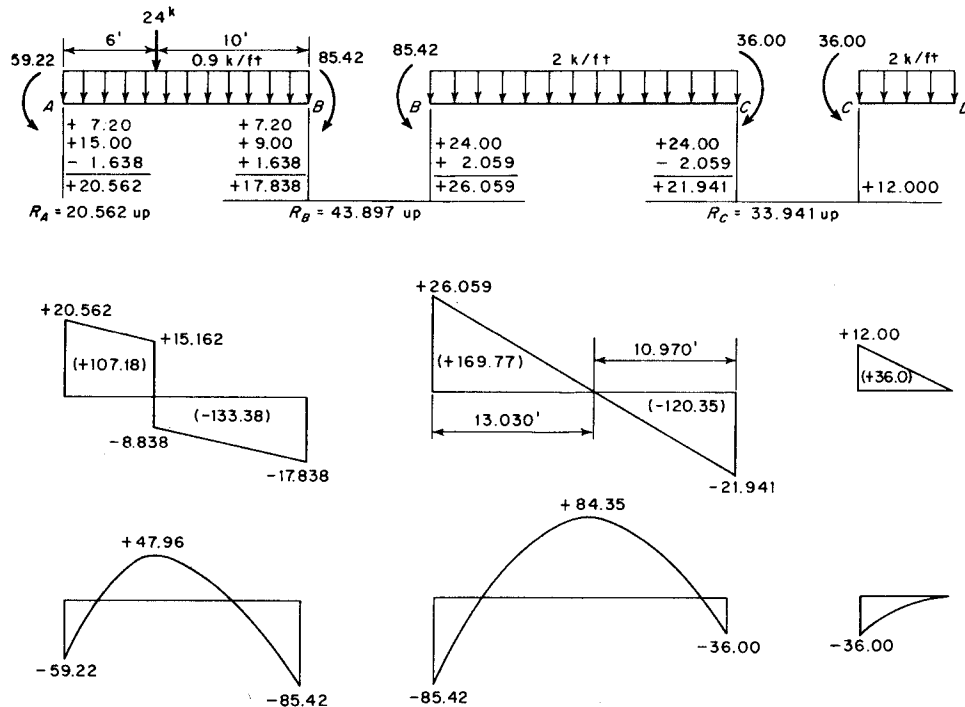
$$M_A = -59.22 \text{ ft-kips}$$

$$M_B = -85.42 \text{ ft-kips}$$

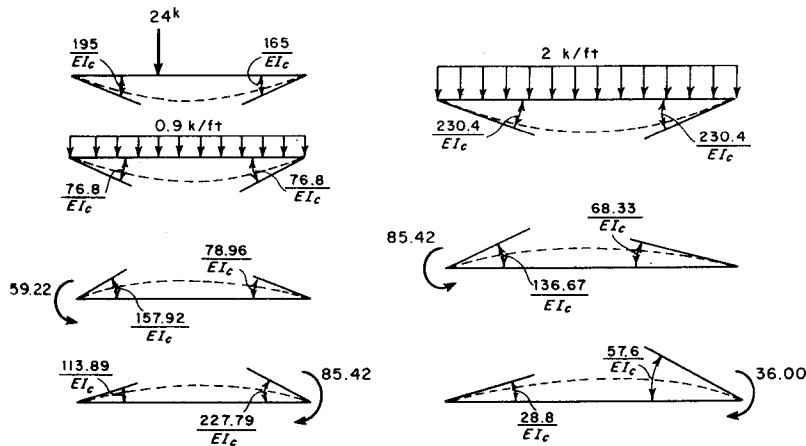
Diagram-diagram gaya geser dan momen untuk bentang-bentang AB dan AC , juga untuk konsol CD , diperlihatkan dalam Gambar 6.12a. Untuk bentang AB , momen-momen lentur negatif sebesar 59,22 dan 85,42 ft-kips ditempatkan pertama pada ujung-ujung. Reaksi-reaksi ujung sebesar + 7,20 dan + 7,20 kips adalah akibat muatan terbagi rata pada AB ; + 15,00 dan + 9,00 kips, akibat dari muatan yang terpusat pada AB ; dan - 1,638 dan + 1,638 kips, akibat momen ujung yang tidak setimbang sebesar 85,42 —



GAMBAR 6.11. Penyelesaian dengan Persamaan Tiga Momen (Contoh Soal 6.3).



(a) Diagram-diagram gaya geser dan momen



(b) Pemeriksaan-pemeriksaan kemalaran

GAMBAR 6.12. Penyelesaian dengan Persamaan Tiga-momen (Contoh Soal 6.3).

59,22 = 26,20 ft-kips searah jarum jam, yang membutuhkan sebuah kopel reaksi berlawanan arah jarum jam berasal dari sebuah gaya ke atas di B dan gaya ke bawah di A.

Dua pemeriksaan kemalaran dapat dilakukan dengan menerapkan cara balok-terpadu pada bentang-batang AB dan BC, seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.12b. Kedua pemeriksaan tersebut adalah

$$1) \theta_A \text{ (bentang } AB) = 0,$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI_C} (+195 + 76.8 - 157.92 - 113.89) = \frac{1}{EI_C} (271.8 - 271.81) \approx 0 \quad (\text{periksa})$$

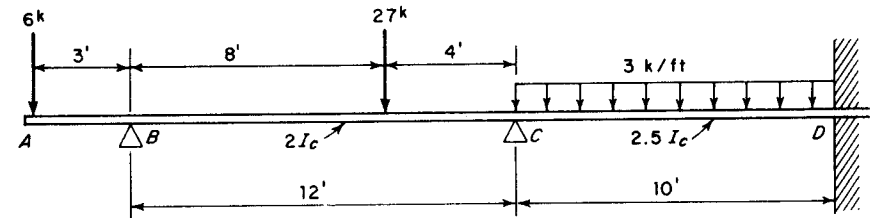
$$2) \theta_B \text{ (bentang } AB) = \theta_B \text{ (bentang } BC),$$

$$\frac{1}{EI_C} (-165 - 76.8 + 78.96 + 227.79) = \frac{1}{EI_C} (+23.04 - 136.67 - 28.8)$$

$$\frac{1}{EI_C} (+64.95) \approx \frac{1}{EI_C} (+64.93) \quad (\text{periksa})$$

LATIHAN 6.5

Analisis balok malar diperlihatkan dalam Gambar 6.13 dengan menggunakan persamaan tiga-momen. Gambarkan diagram-diagram gaya geser dan momen dan periksalah kemalarannya.



GAMBAR 6.13. Latihan 6.5.

6.6 Cara Perpindahan—Cara Kelandaian Kelendutan

Telah diutarakan sebelumnya (dalam Pasal 6.3) bahwa dalam cara perpindahan analisis, perpindahan simpul, yang sama jumlahnya dengan derajat kebebasan, diambil sebagai unsur-unsur utama yang tidak diketahui. Perpindahan sebuah simpul dalam sebuah balok dapat mencakup sebuah perpindahan perputaran (*kelandaian*) dan perpindahan melintang (lendutan). Untuk sebuah batang yang tak dimuati yang khas (atau *elemen*) AB (Gambar

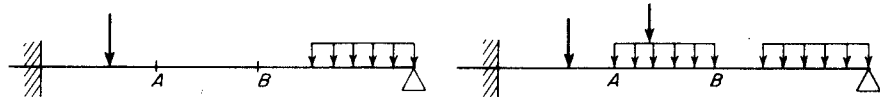
6.14a) dalam sebuah balok, keempat besaran θ_A , Δ_A , θ_B dan Δ_B (Gambar 6.14b) menentukan bentuk geometrik dari ujung-ujungnya. Diagram bagian lepas dari batang yang tidak dimuati ini diperlihatkan dalam Gambar 6.14d, di mana empat besarannya adalah M'_A , V'_A , M'_B dan V'_B .

Andaikata beban-beban melintang diterapkan pada balok yang khas AB , seperti dalam Gambar 6.14b, maka dimungkinkan untuk mendapatkan besaran-besaran gaya M_{0A} , R_{0A} , M_{0B} , dan R_{0B} yang disyaratkan untuk menjamin kelandaian dan lendutan nol pada kedua ujungnya. Gaya-gaya yang menjepit ini disebut *momen-momen ujung terjepit* (M.U.T) dan *reaksi-reaksi* (*fixed-end moment and reaction*) dan rumus-rumus untuk beban terbagi rata dan sebuah beban terpusat diperlihatkan dalam Gambar 6.14e.

Berdasarkan prinsip superposisi, kedua ujung yang bekerja pada tiap batang yang khas AB dalam sebuah balok dapat diungkapkan sebagai

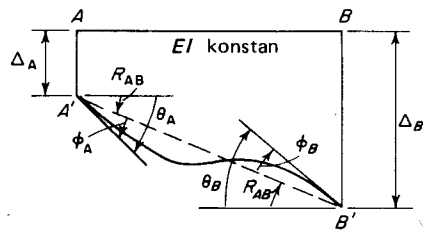
$$(6.6.1a) \quad M_A = M_{0A} + M'_A$$

$$(6.6.1b) \quad M_B = M_{0B} + M'_B$$



(a) Sebuah elemen balok AB yang tidak dimuati

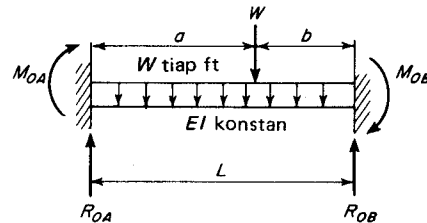
(d) Sebuah elemen balok AB yang dimuati



(b) Gambar geometri dari sebuah elemen balok yang tak dimuati



(c) Bagan momen-momen dan gaya-gaya pada sebuah balok yang tak dimuati



$$M_{0A} = -\frac{wL^2}{12} - \frac{wab^2}{L^2}$$

$$M_{0B} = +\frac{wL^2}{12} + \frac{wba^2}{L^2}$$

$$R_{0A} = +\frac{wL}{2} + \frac{wb^2}{L^3}(3a+b)$$

$$R_{0B} = +\frac{wL}{2} + \frac{wa^2}{L^3}(3b+a)$$

(e) Gaya-gaya pada keadaan terjepit pada sebuah elemen balok yang dimuati

GAMBAR 6.14. Persamaan-persamaan Lendutan-Kelandaian.

Misalkan ϕ_A dan ϕ_B (Gambar 6.14d) adalah perputaran-perputaran ujung *searah jarum jam* yang diukur dari sumbu batang yang baru $A'B'$ terhadap garis-garis singgung dari kurva di A dan B , dan misalkan R_{AB} (Gambar 6.14b) adalah perputaran searah jarum jam diukur dari sumbu batang yang asli terhadap sumbu batang yang baru; maka

$$(6.6.2) \quad R = \frac{\Delta_B - \Delta_A}{L}$$

dan

$$(6.6.3a) \quad \phi_A = \theta_A - R_{AB}$$

$$(6.6.3b) \quad \phi_B = \theta_B - R_{AB}$$

Berdasarkan cara balok-terpadu,

$$(6.6.4a) \quad \phi_A = +\frac{L}{3EI}M'_A - \frac{L}{6EI}M'_B$$

$$(6.6.4b) \quad \phi_B = -\frac{L}{6EI}M'_A + \frac{L}{3EI}M'_B$$

Penyelesaian M'_A dan M'_B dalam Persamaan (6.6.4) dinyatakan dalam ϕ_A dan ϕ_B ,

$$(6.6.5a) \quad M'_A = \frac{4EI}{L}\phi_A + \frac{2EI}{L}\phi_B$$

$$(6.6.5b) \quad M'_B = \frac{2EI}{L}\phi_A + \frac{4EI}{L}\phi_B$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (6.6.5) dan (6.6.3) ke dalam Persamaan (6.6.1),

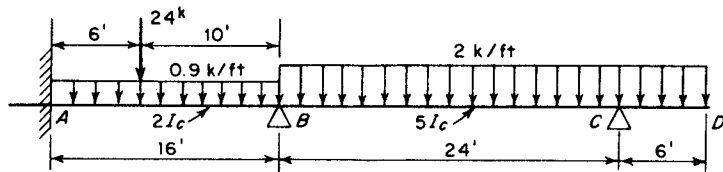
$$(6.6.6a) \quad M_A = M_{0A} + \frac{4EI}{L}(\theta_A - R) + \frac{2EI}{L}(\theta_B - R)$$

$$(6.6.6b) \quad M_B = M_{0B} + \frac{2EI}{L}(\theta_A - R) + \frac{4EI}{L}(\theta_B - R)$$

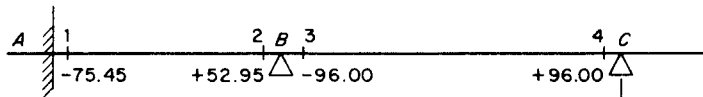
Persamaan-persamaan (6.6.6a dan b) disebut *persamaan-persamaan lendutan-kelandaian* karena kedua persamaan mengungkapkan momen-momen ujung searah jarum jam M_A dan M_B yang bekerja pada sebuah batang yang khas AB dalam sebuah balok yang dinyatakan dalam beban-beban yang diterapkan pada batang dan kelandaian-kelandaian dan lendutan-lendutan pada kedua ujung.

Pada analisis balok cara perpindahan, momen-momen ujung batang pertama-tama diungkapkan dalam kelandaian-kelandaian yang tidak diketahui

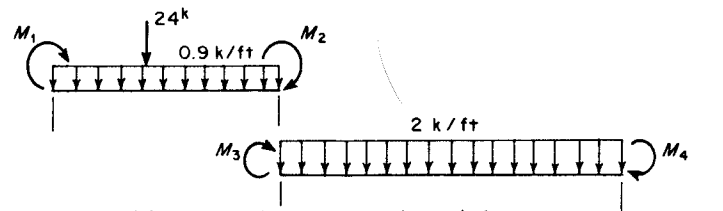
dan lendutan-lendutan pada simpul-simpul. Kemudian persyaratan-persyaratan kesetimbangan pada simpul-simpul, dalam hubungan satu lawan satu terhadap tiap derajat kebebasan, dipergunakan untuk menyusun sebuah sistem persamaan simultan di mana perpindahan-perpindahan simpul merupakan yang tidak diketahui. Jadi ketidaktertentuan adalah tidak relevan dalam cara lendutan-kelandaian di mana dapat dipergunakan untuk menganalisis balok-balok baik statik tertentu maupun tidak tertentu. Derajat kompleksitas tergantung pada jumlah simpul-simpul yang diambil oleh penghitung. Dalam perhitungan-perhitungan dengan tangan tak ada alasan untuk mempergunakan cara lendutan-kelandaian untuk sebarang analisis balok statik tertentu, dan seyogyanya jangan menggunakan derajat kebebasan lebih besar dari keperluan yang minimum dalam analisis balok statik tidak tertentu. Akan tetapi pada perhitungan digital, analisis boleh menempatkan simpul-simpul di sebarang tempat di mana keterangan tentang kelandaian, lendutan, gaya geser, atau momen diinginkan sebagai hasil hitungan. Tentu saja hal ini akan memakan biaya untuk tambahan masukan data dan waktu operasi dari komputer.



(a) Balok yang diketahui



(b) Tanda-tanda ujung batang dan momen-momen ujung yang terjepit



(c) Diagram-diagram bagian lepas dari batang-batang

(d) Diagram dengan bagian-lepas yang sesuai dengan derajat-derajat kebebasan θ_B dan θ_C

GAMBAR 6.15. Penyelesaian dengan Cara Lendutan-Kelandaian (Contoh 6.4).

Contoh Soal 6.4. Analisis balok malar dari Contoh Soal 6.3 (yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 6.15a) dengan cara lendutan-kelandaian.

Penyelesaian. Jumlah simpul-simpul minimum yang harus diambil adalah tiga buah: A , B , dan C , yang mencakup dua batang AB dan BC . Ujung-ujung batang ditandai sebagai 1, 2, 3, dan 4 seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.15b; momen-momen ujung-terjepit adalah

$$M_{01} = -\frac{24(6)(10)^2}{(16)^2} - \frac{0.9(16)^2}{12} = -56.25 - 19.20 = -75.45 \text{ ft-kips}$$

$$M_{02} = +\frac{24(10)(6)^2}{(16)^2} + \frac{0.9(16)^2}{12} = +33.75 + 19.20 = +52.95 \text{ ft-kips}$$

$$M_{03} = -\frac{2(24)^2}{12} = -96.0 \text{ ft-kips}$$

$$M_{04} = +\frac{2(24)^2}{12} = +96.0 \text{ ft-kips}$$

Kebebasan-kebebasan yang hanya dimiliki oleh tiga simpul adalah perputaran-perputaran di simpul-simpul B dan C , jadi θ_B dan θ_C hanyalah merupakan dua perpindahan simpul yang tidak diketahui, dan perputaran-perputaran sumbu batang R_{AB} dan R_{BC} keduanya adalah sama dengan nol. Persamaan-persamaan lendutan-kelandaian untuk momen-momen ujung-batang M_1 , M_2 , M_3 , dan M_4 diperlihatkan dalam Gambar 5.13c adalah

$$M_1 = -75.45 + \frac{2E(2I_c)}{16}\theta_B = -75.45 + \frac{1}{4}EI_c\theta_B$$

$$M_2 = +52.95 + \frac{4E(2I_c)}{16}\theta_B = +52.95 + \frac{1}{2}EI_c\theta_B$$

$$M_3 = -96.00 + \frac{4E(5I_c)}{24}\theta_B + \frac{2E(5I_c)}{24}\theta_C = -96.00 + \frac{5}{6}EI_c\theta_B + \frac{5}{12}EI_c\theta_C$$

$$M_4 = +96.00 + \frac{2E(5I_c)}{24}\theta_B + \frac{4E(5I_c)}{24}\theta_C = +96.00 + \frac{5}{12}EI_c\theta_B + \frac{5}{6}EI_c\theta_C$$

Persamaan-persamaan kesetimbangan yang sesuai dengan kedua derajat kebebasan θ_B dan θ_C adalah, dari Gambar 6.15d,

$$+M_2 + M_3 = 0$$

$$+M_4 - 36.00 = 0$$

Perhatikan bahwa berhubung M_1 , M_2 , M_3 dan M_4 semuanya adalah tidak diketahui, kesemuanya harus dipandang bekerja searah jarum jam pada ujung-ujung batang dan berlawanan arah jarum jam pada simpul-simpul.

Dengan mensubstitusikan ungkapan-ungkapan M_1 , M_2 , M_3 dan M_4 ke dalam kedua persamaan kesetimbangan, diperoleh dua persamaan simultan di bawah ini:

$$\frac{4}{3}EI_c\theta_B + \frac{5}{12}EI_c\theta_C = +43.05$$

$$\frac{5}{12}EI_c\theta_B + \frac{5}{6}EI_c\theta_C = -60.00$$

Penyelesaian,

$$EI_c\theta_B = +64.93 \text{ k-ft}^2$$

$$EI_c\theta_C = -104.47 \text{ k-ft}^2$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang telah diketahui dari $EI_c\theta_B$ dan $EI_c\theta_C$ ke dalam persamaan-persamaan lendutan-kelandaian,

$$M_1 = -75.45 + \frac{1}{4}(+64.93) = -59.22 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = +52.95 + \frac{1}{2}(+64.93) = +85.42 \text{ ft-kips}$$

$$M_3 = -96.00 + \frac{5}{6}(+64.93) + \frac{5}{12}(-104.47) = -85.42 \text{ ft-kips}$$

$$M_4 = +96.00 + \frac{5}{12}(+64.93) + \frac{5}{6}(-104.47) = +36.00 \text{ ft-kips}$$

Diagram-diagram gaya geser dan momen untuk AB dan BC sekarang dapat diperoleh (seperti pada Contoh 6.3).

Untuk meyakinkan kebenaran dari penyelesaian, pemeriksaan-pemeriksaan yang mudah dijalankan demi meyakinkan persyaratan-persyaratan kesetimbangan yang sama dalam jumlah angka terhadap derajat kebebasan. Dalam contoh ini adalah $M_2 + M_3 = 0$ dan $M_4 - 36,00 = 0$. Sebagai tambahan, pemeriksaan tentang keadaan sepadan yang sama dalam jumlah angka dengan derajat ketidaktertentuan harus dijalankan. Hal ini adalah tepat sama dengan dua pemeriksaan kemalaran yang dikerjakan dalam Contoh 6.3. Akan tetapi dapat dicatat di sini, bahwa pemeriksaan-pemeriksaan tentang keadaan kemalaran dalam Contoh 6.3 adalah tergantung dari diagram-diagram momen balok sederhana yang digunakan untuk membentuk persamaan-persamaan tiga momen, tetapi tidak dalam persamaan-persamaan lendutan-kelandaian. Jadi, pemeriksaan-pemeriksaan tentang keadaan kesepadanan yang dilakukan sesudah penggunaan penyelesaian lendutan-kelandaian adalah sama sekali mandiri.

Contoh Soal 6.5. Dengan menggunakan jawaban-jawaban dari Contoh-contoh 6.3 atau 6.4, hitunglah kelandaian dan lendutan pada ujung bebas dari balok yang diperlihatkan dalam Gambar 6.16a. Dengan memandang bahwa seluruh balok memiliki empat simpul $A-B-C-D$ dan tiga batang $AB-BC-CD$, tuliskanlah kedua persamaan lendutan-kelandaian untuk M_5 dan M_6 yang dinyatakan dalam θ_C , θ_D , Δ_D , dan pertegaslah bahwa kedua persamaan cocok secara numeris dengan nilai-nilai M_5 , M_6 , θ_C , θ_D , dan Δ_D yang telah diperoleh.

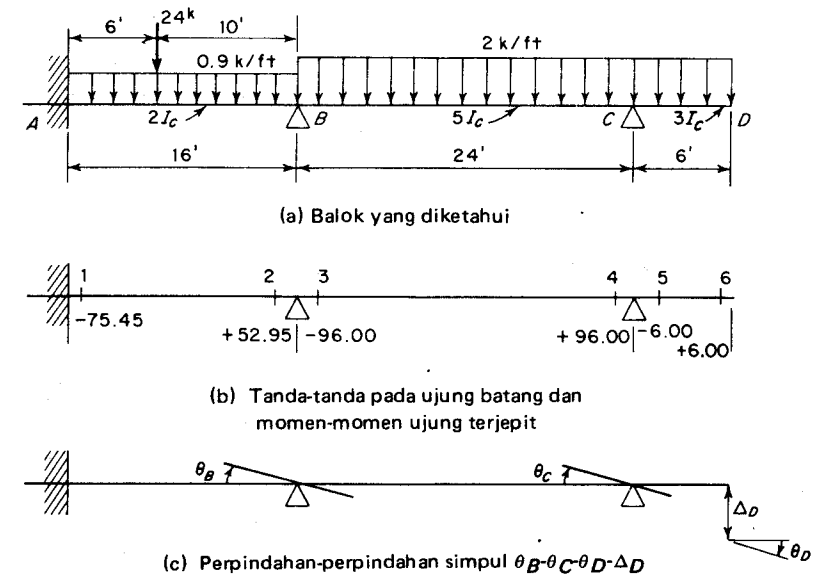
Penyelesaian. Nilai dari θ_C hanya tergantung pada kekakuan lentur EI dari batang-batang AB dan BC dan telah ditentukan dalam Contoh-contoh 6.3 dan 6.4 yaitu adalah $-104.47 \text{ k-ft}^2/(EI_c)$. Tetapi kelandaian dan lendutan di titik D , tak hanya tergantung dari θ_C tetapi juga dari kekakuan lentur dari konsol CD , di mana momen lembamnya sekarang dianggap adalah $3I_c$, seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.16a. Dengan cara luas-momen,

$$\begin{aligned}\theta_D &= \theta_C + \left[\frac{M}{EI} \text{ luas di atas } CD \right] = \frac{1}{EI_c} \left[-104.47 + \frac{1}{3} \left(\frac{36}{3} \right) (6) \right] \\ &= -\frac{80.47}{EI_c} \text{ k-ft}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_D &= 6\theta_C + \left[\text{Momen dari luas } \frac{M}{EI} \text{ di atas } CD \text{ terhadap } D \right] \\ &= \frac{1}{EI_c} \left[6(-104.47) + \frac{1}{3} \left(\frac{36}{3} \right) (6)(4.5) \right] = -\frac{518.8}{EI_c} \text{ k-ft}^3\end{aligned}$$

$$R_{CD} = +\frac{\Delta_D}{6} = -\frac{86.47}{EI_c} \text{ k-ft}^2$$

Perhatikan bahwa θ_C , θ_D dan R_{CD} adalah positif bila searah jarum jam, dan Δ_D adalah positif bila menuju ke arah bawah.



GAMBAR 6.16. Persamaan-persamaan Lendutan-Kelandaian.

Persamaan-persamaan lendutan-kelandaian untuk momen-momen ujung M_5 dan M_6 yang bekerja searah jarum jam pada batang CD adalah

$$\begin{aligned}
 M_5 &= M_{05} + \frac{4EI}{L}(\theta_C - R_{CD}) + \frac{2EI}{L}(\theta_D - R_{CD}) \\
 &= -\frac{2(6)^2}{12} + \frac{4(3)}{6}(-104.47 + 86.47) + \frac{2(3)}{6}(-80.47 + 86.47) \\
 &= -6 - 36 + 6 = -36.0 \text{ ft-kips (periksa)} \\
 M_6 &= M_{06} + \frac{2EI}{L}(\theta_C - R_{CD}) + \frac{4EI}{L}(\theta_D - R_{CD}) \\
 &= +\frac{2(6)^2}{12} + \frac{2(3)}{6}(-104.47 + 86.47) + \frac{4(3)}{6}(-80.47 + 86.47) \\
 &= +6 - 18 + 12 = 0 \text{ (periksa)}
 \end{aligned}$$

LATIHAN 6.6

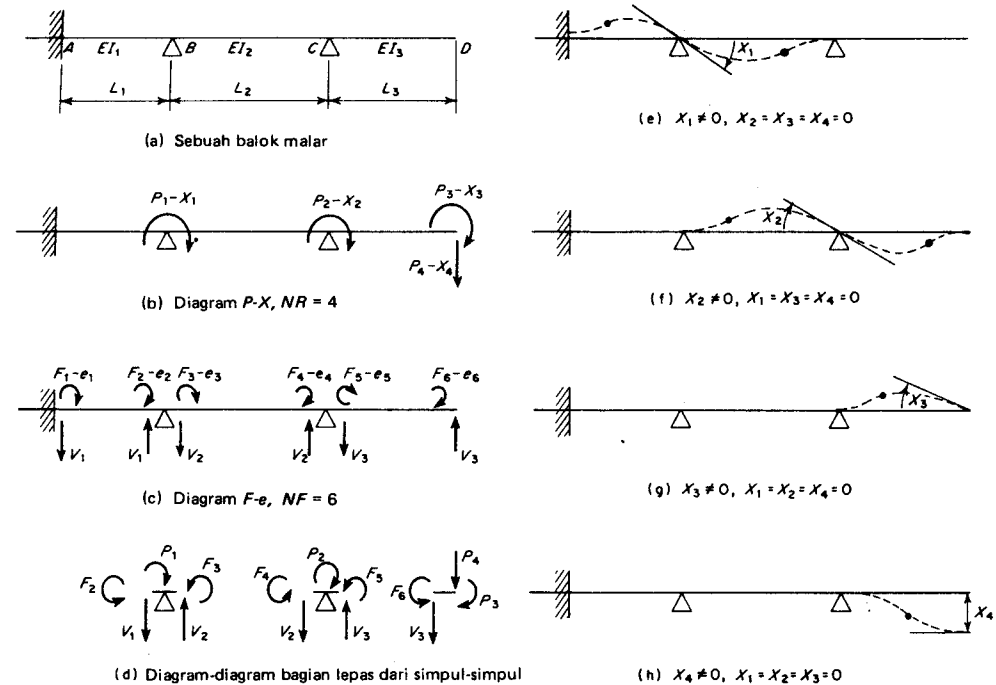
Analisislah balok malar dari Latihan 6.5 (Gambar 6.13) dengan cara lendutan-kelandaian dengan memakai tiga simpul dan dua batang.

LATIHAN 6.7

Dengan menggunakan jawaban-jawaban yang didapat dari Latihan 6.5, hitunglah kelandaian dan lendutan pada ujung bebas dari konsol malar dari balok malar. Tuliskan kedua persamaan lendutan-kelandaian untuk momen-momen ujung yang bekerja sesuai dengan arah jarum jam pada konsol malar dan pertegaslah bahwa kedua persamaan secara numeris memenuhi syarat. Anggaplah bahwa kekakuan lentur dari konsol malar adalah $1,5EI_c$.

6.7 Matriks Statika $[A]$ dan Matriks Perubahan Bentuk $[B]$

Balok malar yang diperlihatkan dalam Gambar 6.17a dapat dianggap memiliki empat titik simpul $A-B-C-D$ dan tiga batang $AB-BC-CD$. Dalam formulasi matriks adalah lebih enak menandai keempat perpindahan simpul yang tak diketahui dengan $X_1-X_2-X_3-X_4$ daripada dengan $\theta_B-\theta_C-\theta_D-\Delta_D$. Umumnya, beban-beban diterapkan secara melintang pada batang-batang di antara ujung-ujungnya. Akan tetapi, untuk sementara waktu, anggaplah bahwa beban-beban diterapkan di simpul-simpul saja sebagai $P_1-P_2-P_3-P_4$, dalam hubungan satu lawan satu dengan $X_1-X_2-X_3-X_4$, seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.17b. Cara pemindahan dari beban-beban melintang pada batang-batang ke beban-beban pada simpul-simpul akan dibicarakan kemudian.



GAMBAR 6.17. Matriks-matriks $[A]$ dan $[B]$.

Ada analogi yang dekat antara sebuah balok malar dan sebuah rangka, khususnya bila beban diterapkan di simpul-simpul. Seperti pada sepasang gaya tarik yang segaris yang bekerja pada ujung-ujung dari sebuah batang rangka, maka harus ada sebuah momen dan sebuah gaya geser yang bekerja pada tiap ujung dari sebuah elemen yang terlentur. Kedua momen ujung tersebut adalah bebas, tetapi gaya geser adalah sama dengan jumlah dari momen-momen dibagi dengan panjang batang. Jadi, jumlah dari gaya-gaya internal bebas (sebuah momen dipandang sebagai gaya secara umum) dalam sebuah balok malar adalah dua kali dari jumlah batang-batang. Momen-momen ujung dan gaya-gaya geser yang bekerja pada ujung-ujung batang diperlihatkan dalam arah-arrah positifnya dalam Gambar 6.17c. Apabila F_i dan F_j dinyatakan sebagai momen-momen ujung, maka e_i dan e_j , dalam hubungan satu lawan satu, adalah perputaran-perputaran searah jarum jam diukur dari sumbu batang (*baik terpindahkan maupun tidak*) terhadap garis-garis singgung dari kurva elastik pada ujung-ujung.

Matriks statika $[A]$ mengungkapkan gaya-gaya simpul $\{P\}$ dalam momen-momen ujung batang $\{F\}$. Sebagai contoh, dengan mengamati diagram-diagram bagian lepas dari simpul-simpul di Gambar 6.17d.

$$P_1 = F_2 + F_3$$

$$P_2 = F_4 + F_5$$

$$P_3 = F_6$$

$$P_4 = -V_3 = -\frac{F_5 + F_6}{L_3}$$

Maka matriks statika $[A]$ adalah,

$$[A]_{NP \times NF} =$$

$P \backslash F$	1	2	3	4	5	6
1		+1.	+1.			
2				+1.	+1.	
3						+1.
4					$-\frac{1}{L_3}$	$-\frac{1}{L_3}$

Perhatikan bahwa "sifat kepersegian" dari matriks statika, yang adalah $(NF - NP)$, adalah derajat ketidaktertentuan dari struktur.

Matriks perubahan bentuk $[B]$ mengungkapkan perputaran-perputaran ujung batang $\{e\}$ dalam perpindahan-perpindahan simpul $\{X\}$. Sebagai contoh, dengan mengamati diagram-diagram perpindahan simpul dalam Gambar 6.17e, f, g, dan h.

$$e_1 = 0$$

$$e_2 = +X_1$$

$$e_3 = +X_1$$

$$e_4 = +X_2$$

$$e_5 = +X_2 - \frac{X_4}{L_3}$$

$$e_6 = +X_3 - \frac{X_4}{L_3}$$

Maka, matriks perubahan bentuk $[B]$ adalah,

$$[B]_{NF \times NP} =$$

$e \backslash X$	1	2	3	4
1				
2	+1.			
3	+1.			
4		+1.		
5		+1.		$-\frac{1}{L_3}$
6			+1.	$-\frac{1}{L_3}$

Perhatikan bahwa hubungan $[B] = [A^T]$ selalu berlaku. Sebuah bukti berdasarkan Prinsip Kerja Virtual dapat diterapkan untuk balok malar dengan menggunakan cara dasar yang sama seperti digunakan pada rangka dalam Pasal 4.5.

6.8 Matriks Kekakuan Batang $[S]$

Dalam perlakuan cara lendutan-kelandaian yang terdahulu, momen-momen ujung batang yang bekerja pada sebuah elemen balok yang tak dimuati dinamakan M'_A dan M'_B ; dan perputaran-perputaran ujung batang dinamakan ϕ_A dan ϕ_B . Namun dalam cara perpindahan matriks momen-momen ujung batang yang sama disebut F_i dan F_j ; dan perputaran-perputaran ujung batang yang sama disebut e_i dan e_j . Hal yang kelihatannya berbeda ini ditimbulkan karena keinginan untuk menyatukan notasi-notasi yang digunakan dalam cara perpindahan matriks apakah struktur tersebut adalah sebuah rangka, sebuah balok malar, atau sebuah atau sejumlah tipe kompleks yang lain. Adalah cukup untuk menyatakan pada saat ini ekivalensi dari M'_A - M'_B terhadap F_i - F_j dan dari ϕ_A - ϕ_B terhadap e_i - e_j . Setelah hal tersebut di atas dinyatakan, Persamaan (6.6.4ab) dapat diungkapkan dalam notasi matriks sebagai

$$\begin{Bmatrix} e_i \\ e_j \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$$

di mana

(6.8.1)

$$[D] = \begin{bmatrix} F & F_i & F_j \\ e & +\frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ e_i & +\frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ e_j & -\frac{L}{6EI} & +\frac{L}{3EI} \end{bmatrix}$$

Sama halnya, Persamaan (6.6.5ab) dapat diungkapkan dalam notasi matriks sebagai

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} e_i \\ e_j \end{Bmatrix}$$

di mana

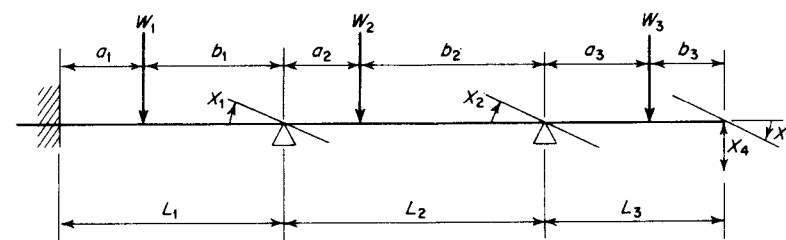
(6.8.2)

$$[S] = \begin{bmatrix} F & e_i & e_j \\ F_i & +\frac{4EI}{L} & +\frac{2EI}{L} \\ F_j & +\frac{2EI}{L} & +\frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

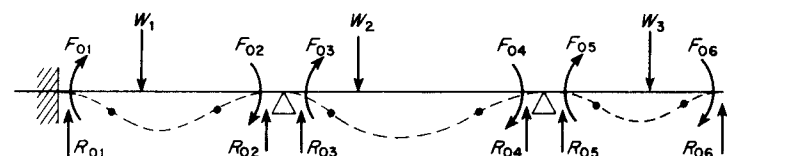
Matriks $[D]$ dari Persamaan (6.8.1) adalah matriks kelenturan batang dari sebuah elemen balok yang tidak dimuati, dan matriks $[S]$ dari Persamaan (6.8.2) adalah matriks kekakuan batang dari sebuah elemen balok yang tidak dimuati.

6.9 Matriks Gaya-Simpul $\{P\}$

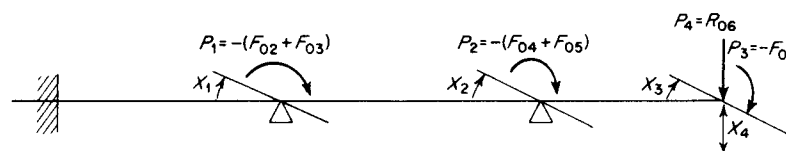
Jarang terjadi beban-beban pada sebuah balok malar diterapkan secara langsung terhadap derajat kebebasan yang dipilih; dalam kejadian seperti itu elemen-elemen dalam matriks $\{P\}$ dapat dengan mudah disusun, seperti halnya pada analisis rangka. Seringkali gaya-gaya melintang yang diterapkan pada sepanjang batang dan gaya-gaya ini harus ditransmisikan ke simpul-simpul. Transmisi ini dapat dipengaruhi oleh keadaan terjepit, di mana semua perpindahan simpul sepanjang derajat kebebasannya adalah nol. Misalnya, balok malar dari Gambar 6.18a dapat dipandang sebagai jumlah dari



(a) Balok yang diberikan, $NP = 4$



(b) Keadaan terjepit



(c) Keadaan gaya-simpul

GAMBAR 6.18. Matriks Gaya-Simpul $\{P\}$.

balok dalam keadaan terjepit dari Gambar 6.18b dan balok yang mendapat pembebanan simpul dari Gambar 6.18c.

Bila momen-momen searah jarum jam $(F_{02} + F_{03})$, $(F_{04} + F_{05})$ dan (F_{06}) , juga gaya ke atas R_{06} , diterapkan pada balok dari Gambar 6.18b, semua perpindahan simpul X_1 sampai X_4 akan menjadi nol. Kemudian, bila semua gaya-gaya lawan dari keempat gaya penahan (sebuah momen dipandang sebagai gaya secara umum) diterapkan pada simpul-simpul, maka akan menyebabkan X_1 sampai X_4 dalam Gambar 6.18 bernilai sama dengan X_1 sampai X_4 dalam Gambar 6.18a. Momen-momen ujung batang jumlah F_1^* sampai F_6^* dalam Gambar 6.18a kemudian akan merupakan jumlah dari F_{01} sampai F_{06} dalam Gambar 6.18b dan F_1 sampai F_6 dalam Gambar 6.18c.

Gaya-gaya simpul ekuivalen dalam Gambar 6.18c adalah

$$P_1 = -(F_{02} + F_{03}) = -\left[+\frac{W_1 b_1 a_1^2}{L_1^2} - \frac{W_2 a_2 b_2^2}{L_2^2} \right]$$

$$P_2 = -(F_{04} + F_{05}) = -\left[+\frac{W_2 b_2 a_2^2}{L_2^2} - \frac{W_3 a_3 b_3^2}{L_3^2} \right]$$

$$P_3 = -F_{06} = -\left[+\frac{W_3 b_3 a_3^2}{L_3^2} \right]$$

$$P_4 = +R_{06} = +\frac{W a_3^2}{L_3^3} (3b_3 + a_3)$$

6.10 Cara Perpindahan-Matriks

Cara perpindahan matriks dari analisis balok malar pertama menyangkut penentuan dari derajat kebebasan NP yang mungkin adalah di bawah jumlah minimum yang disyaratkan secara mutlak pada titik-titik ketidakmalaran. Jumlah dari gaya-gaya internal bebas NF , yang adalah momen-momen ujung batang, adalah sama dengan dua kali dari jumlah batang-batang. Derajat ketidaktentuan adalah $(NF - NP)$.

Selanjutnya, cara ini mensyaratkan penentuan matriks statika $[A]$ dan matriks perubahan bentuk $[B]$, masing-masing sesuai dengan definisinya, dengan suatu pemeriksaan visual dari hubungan $[B] = [A^T]$. Momen-momen ujung terjepit $\{F_0\}$ kemudian dihitung dan matriks gaya simpul $\{P\}$ ditentukan; elemen-elemen dalam matriks $\{P\}$ adalah lawan dari yang bekerja pada ujung-ujung batang pada kondisi terjepit.

Dengan menggabungkan keadaan-keadaan kesetimbangan,

$$\{P\}_{NP \times 1} = [A]_{NP \times NF} \{F\}_{NF \times 1}$$

hubungan-hubungan gaya-perubahan bentuk

$$\{F\}_{NF \times 1} = [S]_{NF \times NF} \{e\}_{NF \times 1}$$

dan persyaratan-persyaratan kesepadanan

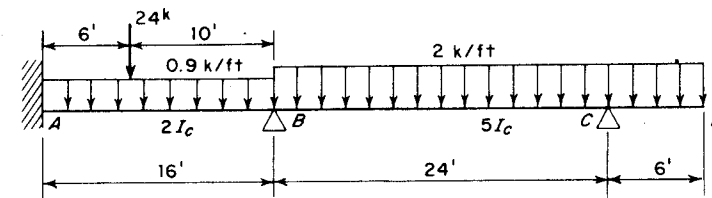
$$\{e\}_{NF \times 1} = [B]_{NF \times NP} \{X\}_{NP \times 1}$$

dua persamaan di bawah ini diperoleh:

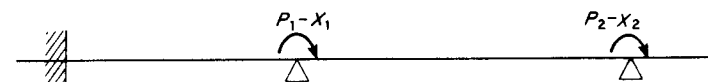
$$(6.10.1) \quad \{X\}_{NP \times 1} = [ASA^T]_{NP \times NP}^{-1} \{P\}_{NP \times 1}$$

dan,

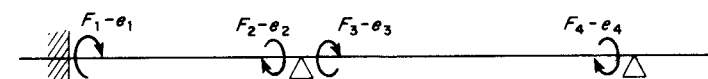
$$(6.10.2) \quad \{F\}_{NF \times 1} = [SA^T]_{NF \times NP} \{X\}_{NP \times 1}$$



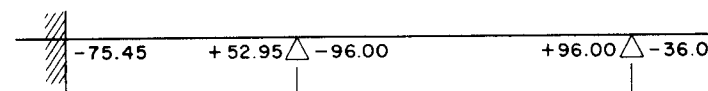
(a) Balok yang diberikan



(b) Diagram $P-X$



(c) Diagram $F-e$



(d) Nilai-nilai F_0

GAMBAR 6.19. Penyelesaian dengan Cara Perpindahan-Matriks (Contoh Soal 6.6).

Kemudian, mengingat bahwa momen-momen ujung akhir $\{F^*\}$ harus merupakan jumlah dari keadaan-keadaan terjepit dan gaya-simpul,

$$(6.10.3) \quad \{F^*\}_{NF \times 1} = \{F_0\}_{NF \times 1} + \{F\}_{NF \times 1}$$

Penerapan dari Persamaan (6.10.a) ke (6.10.3) digambarkan di dalam dua contoh berikut ini:

Contoh Soal 6.6. Dengan menggunakan $A-B-C$ sebagai simpul-simpul, analisislah balok malar dari Contoh 6.3 (yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 6.19a) dengan menggunakan cara perpindahan-matriks.

Penyelesaian. Diagram-diagram $P-X$ dan $F-e$ diperlihatkan dalam Gambar 6.19b dan c. Nilai-nilai F_0 yang diperlihatkan dalam Gambar 6.19d diambil dari Contoh 6.4 atau Gambar 6.15b.

Matriks-matriks $[A]$, $[B]$, $[S]$, dan $\{P\}$ adalah

$$[A]_{2 \times 4} = \begin{array}{c|cccc} & F & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & & & & & \\ 1 & & & +1.0 & +1.0 & \\ 2 & & & & & +1.0 \end{array} \quad \{P\}_{2 \times 1} = \begin{array}{c|c} & LC \\ \hline P & \\ 1 & +43.05 \\ 2 & -60.00 \end{array}$$

$LC = \text{Persyaratan Pembebanan}$

$$[B]_{4 \times 2} = \begin{array}{c|cc} & X & 1 & 2 \\ \hline e & & & \\ 1 & & & \\ 2 & +1.0 & & \\ 3 & +1.0 & & \\ 4 & & +1.0 & \end{array} \quad [S]_{4 \times 4} = \begin{array}{c|cccc} & e & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline F & & & & & \\ 1 & \frac{EI_c}{2} & \frac{EI_c}{4} & & & \\ 2 & \frac{EI_c}{4} & \frac{EI_c}{2} & & & \\ 3 & & & \frac{5EI_c}{6} & \frac{5EI_c}{12} & \\ 4 & & & \frac{5EI_c}{12} & \frac{5EI_c}{6} & \end{array}$$

Dengan perkalian matriks,

$$[SA^T]_{4 \times 2} = \begin{array}{c|cc} & X & 1 & 2 \\ \hline F & & & \\ 1 & \frac{EI_c}{4} & & \\ 2 & \frac{EI_c}{2} & & \\ 3 & \frac{5EI_c}{6} & \frac{5EI_c}{12} & \\ 4 & \frac{5EI_c}{12} & \frac{5EI_c}{6} & \end{array} \quad [ASA^T]_{2 \times 2} = \begin{array}{c|cc} & X & 1 & 2 \\ \hline P & & & \\ 1 & \frac{4EI_c}{3} & \frac{5EI_c}{12} & \\ 2 & \frac{5EI_c}{12} & \frac{5EI_c}{6} & \end{array}$$

Daripada menyelesaikan $\{X\}$ dari $\{X\} = [ASA^T]^{-1}\{P\}$, nilai-nilai dari X_1 dan X_2 diambil dari θ_B dan θ_C dalam penyelesaian lendutan-kelandaian dari Contoh 6.4. Sebuah pemeriksaan diadakan untuk melihat apakah persamaan $\{P\} = [ASA^T]\{X\}$ memuaskan. Jadi,

$$\begin{array}{c|c} +43.05 \\ -60.00 \end{array} = \begin{array}{cc} \frac{4EI_c}{3} & \frac{5EI_c}{12} \\ \frac{5EI_c}{12} & \frac{5EI_c}{6} \end{array} * \begin{array}{c} +\frac{64.93}{EI_c} \\ -\frac{104.47}{EI_c} \end{array}$$

$$\{F^*\} = \begin{array}{c} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \end{array} = \begin{array}{c} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \\ F_{04} \end{array} + [SA^T] \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} -75.45 & \frac{EI_c}{4} & \\ +52.95 & \frac{EI_c}{2} & \\ -96.00 & \frac{5EI_c}{6} & \frac{5EI_c}{12} \\ +96.00 & \frac{5EI_c}{12} & \frac{5EI_c}{6} \end{array} + \begin{array}{c} +\frac{64.93}{EI_c} \\ -\frac{104.47}{EI_c} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} -75.45 & +16.23 & -59.22 \\ +52.95 & +32.47 & +85.42 \\ -96.00 & +10.58 & -85.42 \\ +96.00 & -60.00 & +36.00 \end{array}$$

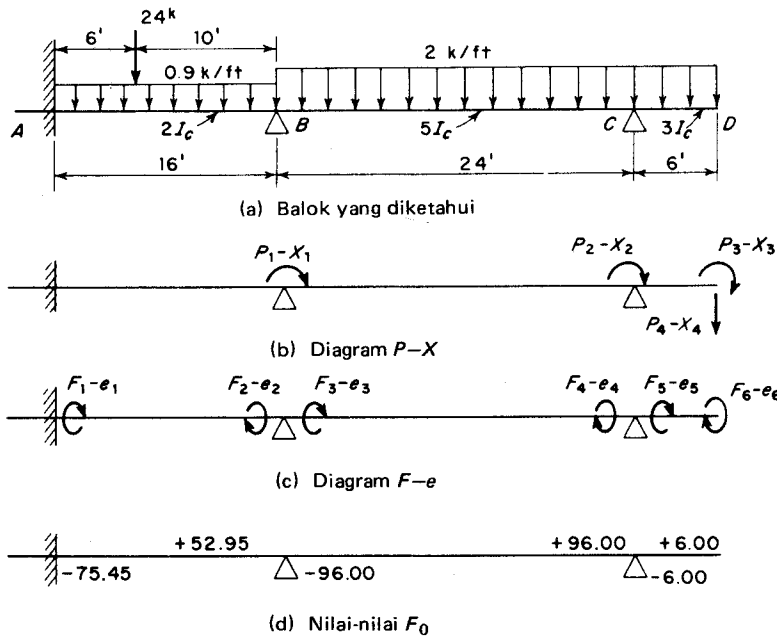
Dengan membandingkan penyelesaian di atas dengan cara lendutan-kelandaian dalam Contoh 6.4, maka akan didapati bahwa persamaan-persa-

maan lendutan-kelandaian, bila dijadikan bentuk matriks, dalam kenyataannya $\{F^*\} = \{F_0\} + [SA^T]\{X\}$, dan persamaan-persamaan simultan dalam cara lendutan kelandaian adalah $\{P\} = [ASA^T]\{X\}$.

Cara perpindahan matriks, bila diungkapkan dan dijalankan dengan perhitungan tangan, sebetulnya mungkin akan menyita waktu yang lebih lama dari cara lendutan-kelandaian; akan tetapi, cara yang terdahulu dapat secara baik diprogramkan pada komputer dengan mengambil $[A]$, $[S]$ dan $\{P\}$ sebagai masukan, dan $\{X\}$ dan $\{F\}$ sebagai hasil keluaran. Bila ada beberapa persyaratan pembebanan, matriks- P akan secara mudah menyatu dengan beberapa kolom.

Contoh Soal 6.7. Dengan menggunakan A - B - C - D sebagai simpul-simpul analisislah balok malar dari Contoh Soal 6.5, yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 6.20a, dengan cara perpindahan matriks. Daripada menyelesaikan Persamaan $\{P\} = [ASA^T]\{X\}$, perhatikan bahwa persamaan ini dipenuhi oleh nilai-nilai dari θ_B - θ_C - θ_D - Δ_D yang telah diperoleh dalam Contoh Soal 6.5.

Penyelesaian. Diagram-diagram P - X dan F - e diperlihatkan dalam Gambar 6.20b dan c dan nilai-nilai dari F_0 yang diperlihatkan dalam Gam-



GAMBAR 6.20. Penyelesaian dengan Cara Pemindahan-Matriks (Contoh Soal 6.7).

bar 6.20d diambil dari Contoh 6.5 atau Gambar 6.16b. Matriks-matriks $[A]$, $[B]$, $[S]$, dan $\{P\}$ adalah

$$[A]_{4 \times 6} = \begin{array}{c|cccccc} \begin{array}{c} F \\ P \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & +1.0 & +1.0 & & & \\ 2 & & & & +1.0 & +1.0 & \\ 3 & & & & & & +1.0 \\ 4 & & & & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}$$

$$\{P\} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} LC \\ P \end{array} & 1 \\ \hline 1 & +43.05 \\ 2 & -90.00 \\ 3 & -6.00 \\ 4 & +6.00 \end{array}$$

$$[B]_{6 \times 4} = \begin{array}{c|cccc} \begin{array}{c} X \\ e \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & +1.0 & & & \\ 3 & +1.0 & & & \\ 4 & & +1.0 & & \\ 5 & & +1.0 & & -\frac{1}{6} \\ 6 & & & +1.0 & -\frac{1}{6} \end{array}$$

$$[S]_{6 \times 6} = EI_c * \begin{array}{c|cccccc} \begin{array}{c} e \\ F \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & & & \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & & \\ 3 & & & \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & & \\ 4 & & & \frac{5}{12} & \frac{5}{6} & & \\ 5 & & & & & 2 & 1 \\ 6 & & & & & 1 & 2 \end{array}$$

Dengan perkalian matriks,

$$[SA^T]_{6 \times 4} = EI_c * \begin{array}{c|cccc} \begin{array}{c} X \\ F \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \frac{1}{4} & & & \\ 2 & \frac{1}{2} & & & \\ 3 & \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & & \\ 4 & \frac{5}{12} & \frac{5}{6} & & \\ 5 & & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$[ASA^T]_{4 \times 4} = EI_c * \begin{array}{c|cccc} & X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & & & & & \\ \hline 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{12} & & & \\ 2 & \frac{5}{12} & \frac{17}{6} & 1 & -\frac{1}{2} & \\ 3 & & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \\ 4 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{6} & \end{array}$$

Perhatikan bahwa matriks $[ASA^T]$ adalah selalu simetrik seperti telah dibuktikan terdahulu dalam Pasal 4.5. Dari Contoh 6.5,

$$\{X\}_{4 \times 1} = \begin{array}{c|c} & LC \\ \hline X & \\ \hline 1 & + \frac{64.93}{EI_c} \\ 2 & - \frac{104.47}{EI_c} \\ 3 & - \frac{80.47}{EI_c} \\ 4 & - \frac{518.8}{EI_c} \end{array}$$

Persamaan $\{P\} = [ASA^T]\{X\}$ secara numeris cocok seperti diperlihatkan di bawah:

$$\begin{array}{c|c} +43.05 \\ -90.00 \\ -6.00 \\ +6.00 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} \frac{4}{3} & \frac{5}{12} & & & \\ \hline \frac{5}{12} & \frac{17}{6} & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{6} & \end{array} * \begin{array}{c} +64.93 \\ -104.47 \\ -80.47 \\ -518.8 \end{array}$$

$$\{F^*\} = \begin{array}{c|c} -75.45 \\ +52.95 \\ -96.00 \\ +96.00 \\ -6.00 \\ +6.00 \end{array} + \begin{array}{c|ccc} \frac{1}{4} & & & \\ \hline \frac{1}{2} & & & \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{12} & & \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{6} & & \\ & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} * \begin{array}{c} +64.93 \\ -104.47 \\ -80.47 \\ -518.80 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|c} -75.45 \\ +52.95 \\ -96.00 \\ +96.00 \\ -6.00 \\ +6.00 \end{array} + \begin{array}{c|c} +16.23 \\ +32.47 \\ +10.58 \\ -60.00 \\ -30.00 \\ -6.00 \end{array} = \begin{array}{c|c} -59.22 \\ +85.42 \\ -85.42 \\ +36.00 \\ -36.00 \\ 0.00 \end{array}$$

LATIHAN 6.8

Analisislah balok malar dari Latihan 6.5 (Gambar 6.13) dengan menggunakan cara perpindahan matriks tiga simpul dan dua batang.

LATIHAN 6.9.

Dengan menggunakan ujung bebas dari salah satu simpul yang tergantung, analisislah balok malar dari Latihan 6.5 (Gambar 6.13) dengan menggunakan cara perpindahan matriks. Seperti halnya dalam Latihan 6.7, anggaplah bahwa kekakuan lentur dari konsol malar adalah $1,5EI_c$.

6.11 Cara Distribusi-Momen

Cara distribusi-momen ditemukan oleh Profesor Hardy Cross pada tahun 1930-an dan mendapat penggunaan yang luas pada analisis balok malar dan

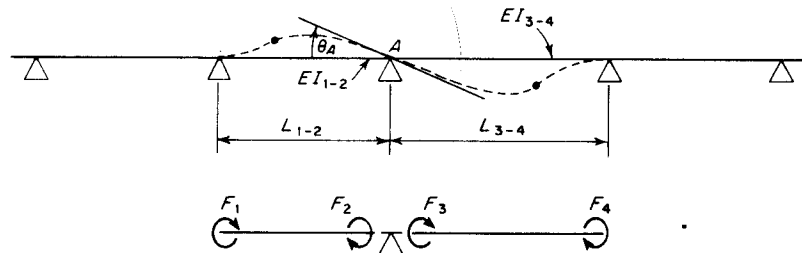
kerangka kaku. Keuntungan utamanya adalah bahwa analisis dapat mendapatkan penyelesaian praktis yang cepat dan efisien juga pengertian yang menyeluruh mengenai arti fisik dari proses-proses perhitungan. Yang paling penting adalah, cara ini menyangkut penyelesaian dari persamaan-persamaan simultan yang berasal baik dari cara lendutan-kelandaian maupun dari cara perpindahan matriks dengan sebuah prosedur relaksasi.

Dalam versi yang elementer ini cara distribusi momen diterapkan hanya pada kejadian-kejadian di mana semua derajat kebebasan adalah dalam perputaran. Dimulai dari kejadian jepit dan perputaran sendi diperbolehkan terjadi dalam tingkat-tingkat yang bertahap sampai kesetimbangan momen pada tiap simpul memuaskan sampai batas-batas yang ditentukan. Tinjaulah, misalnya, pengaruh dari perputaran simpul θ_A pada sebuah penyangga interior yang khas dari sebuah balok malar seperti diperlihatkan dalam Gambar 6.21. Momen-momen dekat ujung F_2 dan F_3 adalah

$$F_2 = \frac{4EI_{1-2}}{L_{1-2}}\theta_A \quad F_3 = \frac{4EI_{3-4}}{L_{3-4}}\theta_A$$

di mana besaran $4EI/L$ dikenal sebagai *faktor kekakuan (stiffness factor)*. Jadi faktor kekakuan adalah perbandingan antara momen di ujung yang dekat terhadap perputaran di ujung tersebut bila ujung yang jauh dijepit. Momen-momen ujung jauh F_1 dan F_4 adalah

$$F_1 = \frac{1}{2}F_2 \quad F_4 = \frac{1}{2}F_3$$



$$F_1 = \frac{1}{2}F_2 \quad F_2 = \frac{4EI_{1-2}}{L_{1-2}}\theta_A \quad F_3 = \frac{4EI_{3-4}}{L_{3-4}}\theta_A \quad F_4 = \frac{1}{2}F_3$$

GAMBAR 6.21. Faktor-faktor kekakuan dan Pelimpahan.

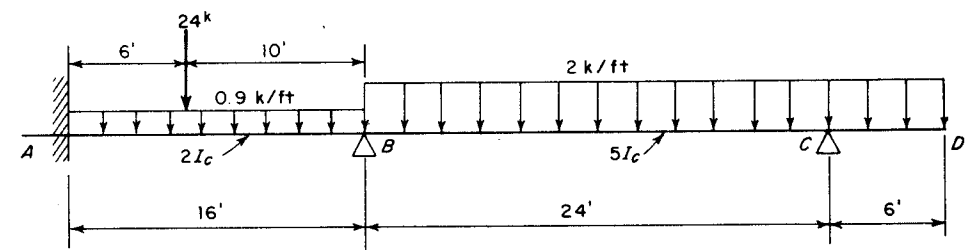
di mana besaran $\frac{1}{2}$ dikenal sebagai *faktor-pelimpahan (carry-over factor)*. Jadi faktor pelimpahan adalah perbandingan antara momen ujung yang jauh dibanding dengan momen ujung yang dekat. *Faktor distribusi* pada setiap dari dua ujung dekat pertemuan pada sebuah penyangga biasa didefinisikan sebagai perbandingan antara tiap faktor kekakuan terhadap jumlah dari kedua faktor kekakuan.

Dalam proses distribusi momen maka momen-momen ujung terjepit pada semua ujung batang dihitung dulu. Kemudian sebuah perputaran simpul diperbolehkan pada tiap derajat kekakuan, sedemikian besar sehingga membuat jumlah dari momen-momen yang ujung batangnya pada simpul tersebut sama dengan nol. Sementara itu, dua momen pelimpahan, masing-masing sama dengan separo dari momen-momen penyeimbang yang ditambahkan pada ujung yang dekat, ditempatkan pada ujung yang jauh dan diperlakukan seperti momen-momen ujung terjepit yang baru. Perhatikan bahwa faktor distribusi pada penyangga sederhana eksterior (dengan atau tanpa konsol) adalah satu, dan angka faktor distribusi pada penyangga terjepit tidak mempunyai arti karena di situ tidak ada perputaran.

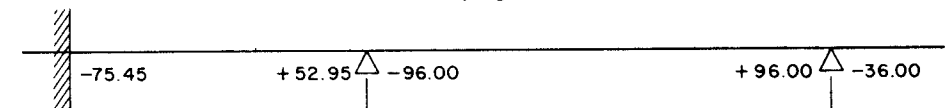
Penggunaan cara distribusi-momen dalam analisis balok malar akan digambarkan dengan contoh berikut.

Contoh Soal 6.8. Analisislah balok malar dari Contoh soal 6.6, yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 6.22a, dengan cara distribusi momen.

Penyelesaian. Distribusi momen yang disyaratkan disusun dalam bentuk tabel yang praktis seperti diperlihatkan dalam Tabel 6.1. Konsol hanyalah merupakan suatu sarana untuk menerapkan sebuah momen simpul di C dan sedemikian rupa bukan merupakan suatu batang dalam persoalan dua derajat kebebasan. Faktor-faktor distribusi sebanding terhadap faktor-faktor kekakuan $4EI/L$, dan juga terhadap EI/L . Karena simpul A adalah terjepit dan tidak membutuhkan penyeimbangan, nama faktor distribusi tidak berlaku di sini dan di bawah AB di Tabel 6.1 diberi setrip. Faktor-faktor distribusi di simpul B adalah $0,1250/(0,1250 + 0,2083) = 0,3750$ un-



(a) Balok yang diketahui



(b) Momen-momen ujung terjepit

GAMBAR 6.22. Penyelesaian dengan Cara Distribusi-Momen (Contoh Soal 6.8).

Simpul		A	B		C	
Batang		AB	BA	BC	CB	Konsol malar
EI/L		$0.1250EI_c$	$0.1250EI_c$	$0.2083EI_c$	$0.2083EI_c$	
F.D		—	0.3750	0.6250	1.0000	
1	MUT PENY	-75.45 —	+52.95 +16.14	-96.00 +26.91	+96.00 -60.00	-36.00
2	PLP PENY	+ 8.07 —	— +11.25	-30.00 +18.75	+13.46 -13.46	
3	PLP PENY	+ 5.62 —	— + 2.52	- 6.73 + 4.21	+ 9.38 - 9.38	
4	PLP PENY	+ 1.26 —	— + 1.76	- 4.69 + 2.93	+ 2.10 - 2.10	
5	PLP PENY	+ 0.88 —	— + 0.39	- 1.05 + 0.66	+ 1.46 - 1.46	
6	PLP PENY	+ 0.20 —	— + 0.27	- 0.73 + 0.46	+ 0.33 - 0.33	
7	PLP PENY	+ 0.14 —	— + 0.06	- 0.16 + 0.10	+ 0.23 - 0.23	
8	PLP PENY	+ 0.03 —	— + 0.04	- 0.12 + 0.08	+ 0.05 - 0.05	
9	PLP PENY	+ 0.02 —	— + 0.01	- 0.02 + 0.01	+ 0.04 - 0.04	
10	PLP PENY	— —	— + 0.01	- 0.02 + 0.01	— —	
Jumlah keseluruhan		-59.23	+85.40	-85.40	+36.00	-36.00
Cek	Perubahan	+16.22	+32.45	+10.60	-60.00	
	$-\frac{1}{2}$ Perubahan	-16.22	- 8.11	+30.00	- 5.30	
	Jumlah	0.00	+24.34	+40.60	-65.30	
	$\frac{3EI}{L}$	$0.375EI_c$	$0.375EI_c$	$0.625EI_c$	$0.625EI_c$	
	$\theta = \frac{\text{Jumlah}}{3EI/L}$	0.00	$+\frac{64.91}{EI_c}$	$+\frac{64.96}{EI_c}$	$-\frac{104.48}{EI_c}$	

tuk BA dan $0,2083/(0,1250 + 0,2083) = 0,6250$ untuk BC . Karena hanya ada satu batang saja yang masuk ke dalam simpul C , faktor distribusi adalah 1,0000 untuk CB .

Momen-momen ujung-terjepit telah dihitung sebelumnya dalam Contoh-contoh 6.4 dan 6.6, dan diperlihatkan lagi dalam Gambar 6.22b serta dimasukkan ke dalam Tabel 6.1. Perhatikan bahwa sejak semula diputuskan untuk mengambil ketelitian dua angka di belakang koma pada distribusi momen ini.

Pada penyeimbangan siklus-pertama, sebuah setrip diletakkan di bawah AB karena ujung A dari batang AB dapat mempunyai momen berapa saja yang dibebankannya. Ketidaksetimbangan di simpul B adalah $(+ 52,95 - 96,00) = -43,05$; sehingga momen-momen penyeimbang keduanya positif. Kedua angka tersebut adalah hasil kali faktor-faktor distribusi dengan 43,05. Ketidaksetimbangan di simpul C adalah $+ 60,00$; sehingga momen penyeimbang pada ujung C dari batang CB adalah $-60,00$.

Pelimpah-pelimpah pada permulaan siklus kedua adalah separo dari momen-momen penyeimbang pada ujung-ujung yang jauh dari siklus pertama, dan memiliki tanda yang sama. Dalam membelah angka yang gasal, maka lazim dalam praktek membuat angka terakhir yang genap. Catat bahwa distribusi momen berhenti pada akhir siklus kesepuluh di mana momen-momen penyeimbang bernilai sama dengan 0,01. Jumlah keseluruhan momen-momen adalah jumlah-jumlah dari momen-momen di tiap kolom-kolom. Nilai-nilainya ternyata cocok dengan hasil yang diperoleh terdahulu dengan lendutan-kelandaian atau cara-cara perpindahan matriks; perbedaan terbesar seharusnya adalah $\pm 0,02$ atau 0,03, tetapi jangan lebih besar lagi.

6.12 Pemeriksaan terhadap Distribusi Momen

Bila sumbu batang tidak berputar ($R = 0$), persamaan-persamaan lendutan-kelandaian (6.6.6a dan b) menjadi

$$(6.12.1a) \quad M_A = M_{0A} + \frac{4EI}{L}\theta_A + \frac{2EI}{L}\theta_B$$

$$(6.12.1b) \quad M_B = M_{0B} + \frac{2EI}{L}\theta_A + \frac{4EI}{L}\theta_B$$

Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut di atas untuk θ_A dan θ_B ,

$$(6.12.2a) \quad \theta_A = \frac{(M_A - M_{0A}) - \frac{1}{2}(M_B - M_{0B})}{(3EI/L)}$$

$$(6.12.2b) \quad \theta_B = \frac{(M_B - M_{0B}) - \frac{1}{2}(M_A - M_{0A})}{(3EI/L)}$$

Persamaan-persamaan (6.12.2a dan b) dapat digunakan untuk mendapatkan kembali perputaran-perputaran, ujung batang dari nilai-nilai momen-ujung batang dari tabel distribusi momen, dengan menyatakan bahwa perputaran ujung batang pada ujung yang dekat adalah sama dengan jumlah perubahan momen pada ujung dekat dan dikurangi separo dari perubahan dari ujung yang jauh. dibagi oleh $3EI/L$. Bila hal ini telah dikerjakan, seperti halnya pemeriksaan pada dasar dari Tabel 6.1, nilai dari θ_A ternyata nol seperti yang diharapkan, dan nilai θ_B yang sama diperoleh di bawah BA dan BC . Kedua pemeriksaan keadaan sepadan menyatakan bahwa distribusi momen telah dijalankan secara benar berdasarkan momen-momen ujung terjepit dan faktor-faktor distribusi yang tersusun pada permulaan Tabel 6.1.

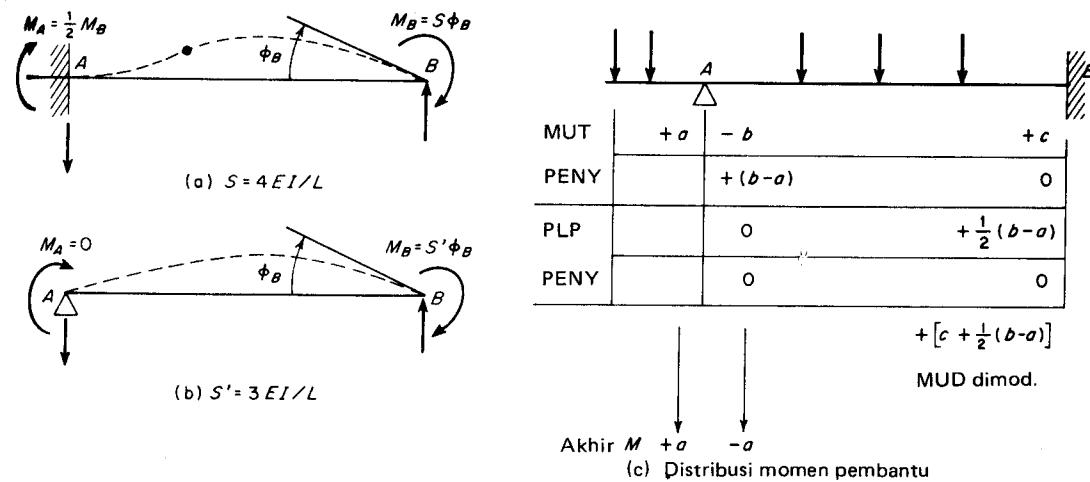
6.13 Faktor Kekakuan dan Momen Ujung-Terjepit yang Dimodifikasi

Bila penyangga eksterior dari sebuah balok malar adalah sebuah penyangga sederhana, baik dengan atau tanpa konsol malar, maka dapat diperlakukan sedemikian rupa pada permulaan dari distribusi momen dengan jalan memodifikasi baik faktor kekakuan maupun momen ujung terjepit pada ujung interior dari bentang eksterior. Bila hal ini telah dijalankan, simpul eksterior tak perlu mengalami perlakuan apapun selama seluruh proses distribusi momen.

Faktor kekakuan $S = 4EI/L$ telah didefinisikan dalam Pasal 6.11 sebagai perbandingan dari momen pada ujung yang dekat (ujung B dalam Gambar 6.23a) terhadap perputaran pada ujung tersebut bila ujung yang jauh (ujung A dalam Gambar 6.23a) adalah terjepit. Bila ujung yang jauh (ujung A dalam Gambar 6.23b) adalah penyangga sederhana, perbandingan dari momen pada ujung yang dekat (ujung B dalam Gambar 6.23b) terhadap perputaran pada ujung tersebut dapat secara mudah dijabarkan dengan cara balok terpadu sebagai $S' = 3EI/L$. Oleh karena itu, faktor kekakuan yang dimodifikasi S' adalah $\frac{3}{4}$ dari faktor kekakuan yang biasa S .

Momen ujung-terjepit yang dimodifikasi pada ujung B dari balok konsol malar AB dapat diperoleh dengan menjalankan distribusi momen pembantu diperlihatkan dalam Gambar 6.23c.

Dengan jalan memodifikasi baik faktor kekakuan maupun momen ujung-terjepit pada ujung interior di dekatnya dari sebuah penyangga sederhana eksterior, distribusi momen untuk seluruh balok malar tersebut dapat agak disederhanakan karena baik pelimpah maupun penyeimbang tak akan muncul lebih lanjut pada penyangga eksterior di luar distribusi momen pembantu. Di dalam contoh kerangka berikut ini, di mana hanya tinggal satu simpul saja yang perlu disetimbangkan setelah penyangga eksterior dianggap seba-



GAMBAR 6.23. Faktor Kekakuan yang Dimodifikasi dan *MUT*.

gai sebuah penyangga sederhana pada permulaannya, hanya dibutuhkan siklus-siklus untuk menjadikan distribusi momen dengan sendirinya menutup.

Contoh Soal 6.9. Susun kembalilah distribusi momen yang dikerjakan dalam Contoh 6.8 dengan jalan memodifikasi faktor kekakuan dari ujung B dari batang BC .

Penyelesaian. Dengan merujuk pada Gambar 6.22 dan Tabel 6.2 faktor-faktor distribusi yang dimodifikasi pada simpul B dihitung berdasarkan pada nilai EI/L biasa dari batang BA dan nilai dari batang BC $0,75EI/L$ yang tereduksi. Simpul C diperlakukan sebagai sebuah penyangga sederhana selama seluruh proses distribusi momen, jadi, nama faktor distribusi tidak berlaku lagi dan sebuah setrip diletakkan di bawah CB dalam Tabel 6.2.

Distribusi momen pembantu dikerjakan pada balok konsol malar BCD yang mempunyai sebuah penyangga terjepit di B dan sebuah perletakan sederhana di C . Dalam Tabel 6.2 distribusi momen berhenti dengan sendirinya pada akhir siklus kedua. Pemeriksaan terhadap distribusi momen harus dikerjakan setepatnya seperti dalam Tabel 6.1.

LATIHAN 6.10

Analisislah balok malar dari Latihan 6.5 (Gambar 6.13) dengan cara distribusi-momen dengan menggunakan kekakuan yang biasa dari batang CB di simpul C .

TABEL 6.2. Distribusi Momen (Contoh 6.9).

Simpul	A	B		C	
Batang	AB	BA	BC	CB	Konsol malar
$\frac{EI}{L}$	$0.1250EI_c$	$0.1250EI_c$	$0.2083EI_c$	$0.2083EI_c$	
$0.75 \frac{EI}{L}$			$0.1562EI_c$		
F.D. dimod.	—	0.4444	0.5556	—	
MUT	-75.45	+52.95	-96.00	+96.00	-36.00
			-30.00	-60.00	
1 MUT dimod. PENY	-75.45 —	+52.95 +32.46	-126.00 +40.59	+36.00	-36.00
2 PLP PENY	+16.23 —	— —	— —		
Jumlah	-59.22	+85.41	-85.41	+36.00	-36.00

Pengecekan terhadap distribusi momen adalah sama dengan yang di Tabel 6.1.

LATIHAN 6.11

Analisislah balok malar dari Latihan 6.5 (Gambar 6.13) dengan cara distribusi-momen dengan menggunakan kekakuan yang dimodifikasi dari batang *CB* di simpul *C*.

6.14 Catatan Penutup

Cara-cara gaya dan perpindahan untuk menghitung balok-balok malar telah dilaksanakan secara bersamaan. Kedua cara tersebut patut mendapat perhatian karena cukup beralasan. Khususnya, Teorema Kerja Terkecil (disuguhkan kemudian dalam Bab 8) akan diperlihatkan sebagai ekuivalen teoretis dari cara gaya.

Cara perpindahan-matriks, bila diprogramkan pada komputer, berguna pada kejadian-kejadian di mana terdapat banyak bentang balok malar dan banyak kejadian-kejadian pembebanan yang akan dihitung.

Cara lendutan-kelandaian yang konvensional berhasil menjembatani pengertian cara perpindahan matriks di satu pihak dan cara distribusi momen di pihak lainnya.

Kerangka-kerangka Kaku (Rigid Frames)

7

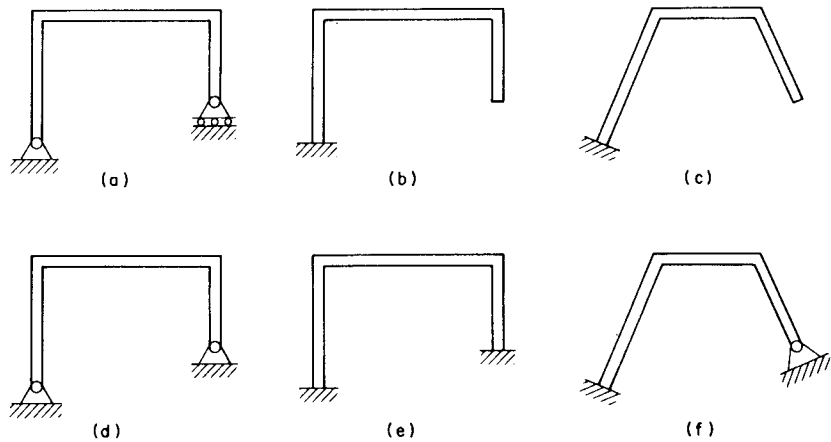
7.1 Definisi-definisi dan Anggapan/asumsi Dasar

Sebuah *kerangka kaku* (*rigid frame*), dalam arti yang sangat umum, adalah sebuah struktur kerangka di mana batang-batang komponen bertemu pada simpul-simpul yang kaku, seperti yang dilambangkan oleh simpul-simpul yang dilas pada baja struktural atau simpul-simpul yang dicor secara monolit pada beton bertulang. Namun demikian, yang dibahas dalam bab ini hanyalah tentang kerangka-kerangka kaku sebidang yang terdiri dari batang-batang prismatik yang lurus dan menahan beban-beban dalam bidang dari kerangka itu sendiri.

Dua kerangka-kaku, satu pada setiap sudut sebuah jembatan lalu lintas, seringkali dirancang untuk menyangga balok-balok lantai yang melintang terhadap arah lalu-lintas. Kerangka-kerangka kaku dengan jarak yang sama dapat dipergunakan untuk menyangga balok-balok lantai dalam sebuah bangunan atau gording-gording (purlin) di bawah sebuah atap. Perakitan dari kerangka-kerangka kaku ruang yang kompleks dapat terlibat dalam struktur-struktur umum seperti jembatan dan gedung atau dalam struktur-struktur khusus seperti pesawat terbang dan kapal laut.

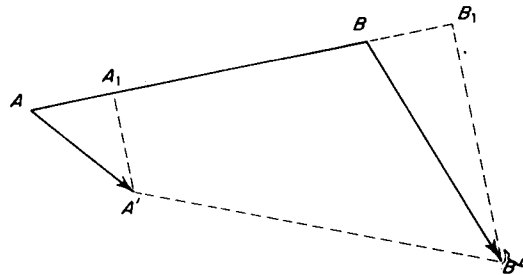
Kerangka-kerangka kaku yang datar, yang dibahas di sini, dapat baik statik tertentu maupun statik tidak tertentu. Meskipun kerangka-kerangka kaku statik tertentu, seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.1a, b, dan c, seringkali tidak dibangun dalam bentuk tersebut dalam prakteknya, namun analisa-analisa lazimnya merupakan prasyarat dalam cara gaya untuk meng-

analisa kerangka-kerangka kaku tidak tertentu. Dalam kenyataannya kerangka-kerangka kaku dalam Gambar 7.1a, b, dan c adalah struktur-struktur dengan derajat lebih rendah dibanding dengan masing-masing struktur terlihat dalam Gambar 7.1d, e, dan f.



GAMBAR 7.1. Kerangka-kerangka Kaku Statik Tertentu dan Tidak Tertentu.

Sebuah batang dalam sebuah kerangka yang kaku, seperti yang nampak pada Gambar 7.1 harus menahan gaya aksial, gaya geser dan momen lentur dalam seluruh panjang batangnya. Penanganan terhadap perubahan gaya geser terpaksa ditunda karena lazimnya pengaruhnya terhadap batang-batang lentur pada ukuran-ukuran biasa adalah sangat kecil. Perubahan bentuk aksial adalah satu-satunya jenis yang ada pada batang-batang dari sebuah rangka dan telah mendapat perhatian pada analisa-analisa rangka. Tetapi pengaruhnya pada perputaran dan lendutan simpul-simpul pada sebuah kerangka kaku kalah menonjol dibandingkan dengan momen lentur; kenyataannya, pengaruhnya terhadap besarnya gaya-gaya kelebihan hanya dalam



GAMBAR 7.2. Gerakan Sebidang dari sebuah Batang pada sebuah Kerangka Kaku.

tingkat beberapa prosen saja. Jadi, pembicaraan dalam bab ini akan membatasi pada anggapan bahwa gaya-gaya aksial pada batang-batang dari suatu kerangka yang kaku tidak akan menimbulkan perubahan-perubahan pada panjang batangnya.

Dalam analisa-analisa tingkat pertama, perpindahan melintang pada kedua ujung dari sebuah batang dalam sebuah struktur dianggap tidak menyebabkan perubahan-perubahan terhadap panjang batang-batang tersebut. Bila panjang batang tidak berubah, perpindahan-perpindahan ujung dari komponen-komponen longitudinal, seperti AA_1 , dan BB_1 dalam Gambar 7.2, haruslah sama. Dalam cara ini, panjang batang baru $A'B'$ dianggap sebagai sama dengan panjang batang asli AB .

Dua anggapan utama yang baru dibicarakan, yaitu bahwa panjang batang tidak berubah akibat gaya aksial dan perpindahan melintang, *selalu* harus diingat selama mempelajari isi lanjutan dari bab ini.

7.2 Perputaran dan Lendutan (defleksi) dari Titik-titik Simpul pada Sebuah Kerangka Kaku

Perputaran dan lendutan dari simpul-simpul pada sebuah kerangka kaku pada ditentukan baik dengan luas momen/cara balok terpadu ataupun dengan cara beban-satuan, asalkan momen-momen lentur sepanjang seluruh panjang-batang komponen diketahui, seperti halnya pada kerangka-kerangka kaku statik tertentu.

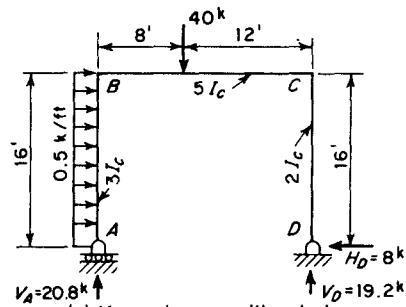
Teorema-teorema luas-momen/balok-terpadu dapat diterapkan pada sebuah batang lurus pada sebuah kerangka kaku dengan cara yang sama seperti pada sebuah balok. Prosedurnya mencakup langkah-langkah penting berikut ini:

- 1) Dapatkan reaksi-reaksi dan buatlah sketsa diagram momen lentur untuk seluruh kerangka kaku statik tertentu;
- 2) tentukan kemungkinan kedudukan-kedudukan baru dari simpul-simpul dan juga perputarannya, serta buatlah sketsa sebuah kurva elastik yang konsisten dengan diagram momen lentur;
- 3) hitung luas-luas momen dimodifikasi dengan memperhatikan faktor kekakuannya dari tiap batang, dan
- 4) terapkan teorema-teorema luas momen/balok terpadu secara berurutan antara ujung-ujung dari tiap batang lurus dan akhirnya pada kedudukan dan perputaran dari simpul-simpul.

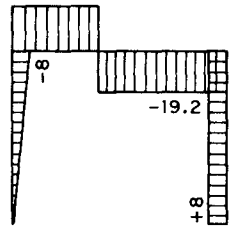
Pada cara beban-satuan untuk mendapatkan perputaran dan lendutan dari simpul-simpul pada sebuah kerangka kaku, rumus-rumus kerja (5.7.6) dan (5.7.7)

$$P_i * Y_i = \int \frac{M m dx}{EI}$$

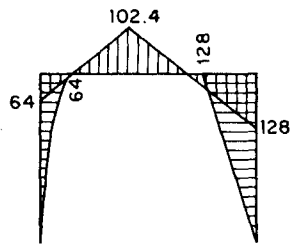
$$P_i * \theta_i = \int \frac{M m dx}{EI}$$



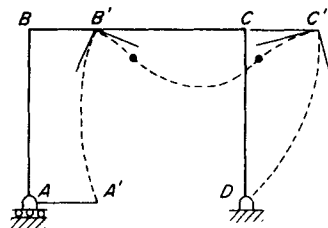
(a) Kerangka yang diketahui



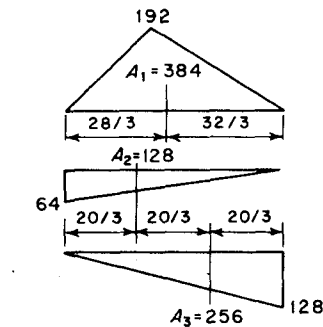
(b) Diagram gaya geser



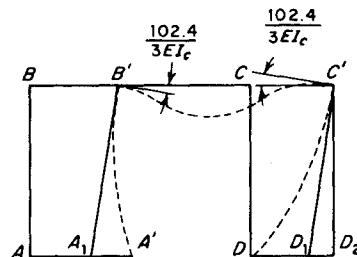
(c) Diagram momen



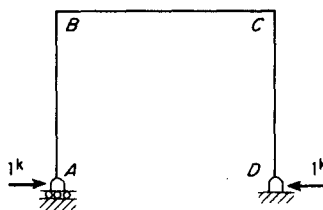
(d) Kurva elastik (perkiraan)



(e) Momen-momen luas dimodifikasi



(f) Kurva elastik (ditinjau kembali)

(g) m untuk Δ_H of A

GAMBAR 7.3. Kerangka kaku dari Contoh Soal 7.1.

harus menyertakan integrasi seluruh batang dari struktur. Bagi pembaca hanya perlu menelaah kembali jabaran yang disuguhkan dalam Pasal 5.7 dan selalu ingat bahwa Prinsip Kerja Virtual sekarang diterapkan pada seluruh kerangka kaku bukan pada sebuah balok.

Contoh Soal 7.1 Tentukan lendutan horisontal dari penyangga rol di A dari kerangka kaku statik tertentu ABCD yang diperlihatkan dalam Gambar 7.3a, pertama dengan cara luas momen/balok-terpadu; kemudian dengan cara beban-satuan.

Penyelesaian

a) Hitunglah reaksi-reaksi dan buatlah sketsa diagram momen. Dengan mengambil momen-momen terhadap A dalam Gambar 7.3a,

$$40(8) + 8(8) = 20V_D$$

$$V_D = 19.2 \text{ kips}$$

Dengan mengambil momen-momen terhadap D dalam Gambar 7.3a,

$$40(12) = 8(8) + 20V_A$$

$$V_A = 20.8 \text{ kips}$$

Jumlah dari gaya-gaya horisontal disamakan dengan nol dalam Gambar 7.3a.

$$H_D = 8 \text{ kips}$$

Diagram-diagram bagian lepas, gaya geser dan momen dari tiap batang dapat diselidiki dan ditentukan batang demi batang. Tetapi untuk menghemat tempat di sini diagram-diagram gaya geser dan momen komposit diperlihatkan dalam Gambar 7.3b dan c. Konvensi tanda yang biasa diterapkan pada nilai-nilai gaya geser dalam Gambar 7.3b dengan memandang batang vertikal dari sebelah kanan; tetapi tanda-tanda dihilangkan untuk nilai-nilai momen dalam Gambar 7.3c, dengan pengertian bahwa diagram momen selalu digambar dari bagian tekan dari batang.

b) **Buatlah sketsa kurva elastik.** Kurva elastik dari seluruh kerangka kaku secara kualitatif diperlihatkan dalam Gambar 7.3d. Beban mendatar akan menggeser batang horizontal BC ke B'C', dengan BB' = CC'. Beban vertikal yang besar kemungkinan akan (dipastikan kemudian) memutar simpul di B' dalam arah searah jarum jam dan simpul di C' berlawanan dengan arah jarum jam. Kurva-kurva elastik B'C', A'B', dan C'D', kemudian disketsa, dengan mengingat bahwa bagian tekan haruslah bagian yang cekung.

c) **Hitunglah luas-luas momen dimodifikasi.** Diagram momen dari batang BC dipisahkan dalam tiga bagian: satu adalah akibat beban vertikal

bekerja pada sebuah balok sederhana, dan dua lainnya adalah akibat dari masing-masing dari dua momen ujung. Ketiga bagian tersebut diperlihatkan dalam Gambar 7.3e. Luas-luas momen dimodifikasi A_1 sampai A_5 , dengan kedudukan-kedudukan titik beratnya, yang diperlihatkan dalam Gambar 7.3e, adalah

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{192}{3} \right) (20) = 384 & A_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{64}{3} \right) (20) = 128 \\ A_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{128}{3} \right) (20) = 256 & A_4 &= \frac{1}{3} \left(\frac{64}{3} \right) (16) = \frac{1024}{9} \\ A_5 &= \frac{1}{2} \left(\frac{128}{3} \right) (16) = 512 \end{aligned}$$

d) Terapkan luas-momen/teorema balok terpadu. Dengan menerapkan Teorema Balok Terpadu I pada $B'C'$.

$$EI_c \theta_B = \frac{A_1 \left(\frac{32}{3} \right)}{20} - \frac{2}{3} A_2 - \frac{1}{3} A_3 = \frac{1}{3} (614.4 - 256 - 256) = \frac{102.4}{3}$$

$$EI_c \theta_C = -\frac{A_1 \left(\frac{28}{3} \right)}{20} + \frac{1}{3} A_2 + \frac{2}{3} A_3 = \frac{1}{3} (-537.6 + 128 + 512) = \frac{102.4}{3}$$

Karena hasil di atas menunjukkan bahwa keduanya θ_B dan θ_C adalah searah jarum jam, sebuah kurva elastik yang ditinjau dan diperbaiki diperlihatkan dalam Gambar 3.7f. Dengan menerapkan Teorema luas-Momen II terhadap $C'D$,

$$\begin{aligned} DD_2 &= DD_1 + D_1 D_2 = \frac{A_3 \left(\frac{32}{3} \right)}{EI_c} + 16\theta_C = \frac{1}{3EI_c} (16384 + 1638.4) \\ &= \frac{18022.4}{3EI_c} = CC' = BB' \end{aligned}$$

Dengan menerapkan Teorema Luas-Momen II terhadap $A'B'$,

$$\begin{aligned} AA' &= AA_1 + A_1 A' = (BB' - 16\theta_B) + A_1 A' \\ &= \frac{1}{EI_c} \left[\frac{18022.4}{3} - \frac{16(102.4)}{3} + 12A_4 \right] \\ &= \frac{1}{3} EI_c (18022.4 - 1638.4 + 4096) = \frac{20480}{3EI_c} \text{ k-ft}^3 \end{aligned}$$

e) Hitunglah ΔH di A dengan cara beban-satuan. Nilai-nilai M dan m diamati dari Gambar 7.3a dan g dan dipergunakan pada rumus kerja dari cara beban satuan.

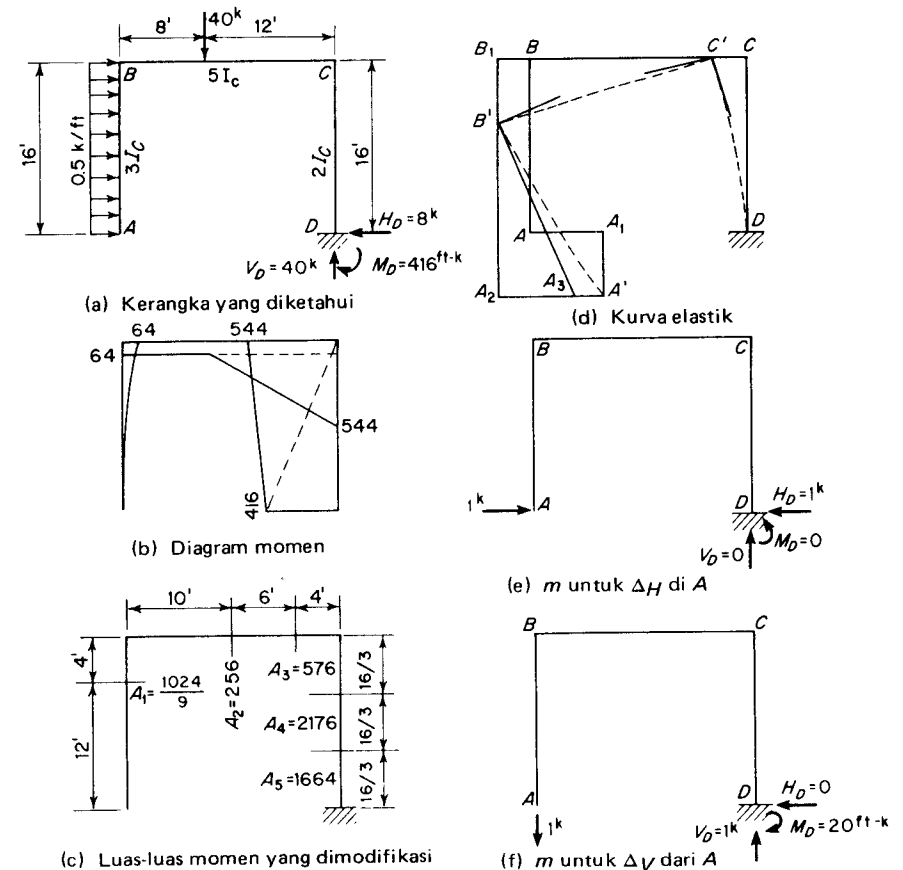
$$\begin{aligned} EI_c \Delta_H \text{ dari } A &= \int \frac{Mmdx}{EI} = \frac{1}{3} \int_0^{16} \left(-\frac{0.5x^2}{2} \right) (-x) dx + \frac{1}{3} \int_0^8 (-64 + 20.8x) (-16) dx \\ &+ \frac{1}{3} \int_0^{12} (-128 + 19.2x) (-16) dx + \frac{1}{2} \int_0^{16} (8x)(x) dx \\ &= \frac{4096}{3} - 491.52 + 491.52 + \frac{16384}{3} = \frac{20480}{3} \text{ k-ft}^3 \text{ (periksa)} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pengaruh dari momen lentur pada BC terhadap lendutan horisontal dari A adalah nol, seperti terbukti pada perputaran-perputaran yang sama pada simpul-simpul B dan C pada kurva elastik yang ditinjau kembali pada Gambar 7.3f.

Contoh Soal 7.2. Tentukanlah lendutan-lendutan horisontal dan vertikal dari ujung bebas konsol kerangka kaku $ABCD$ diperlihatkan dalam Gambar 7.4a, pertama dengan cara luas-momen, kemudian dengan cara beban-satuan.

Penyelesaian. Reaksi-reaksi pada penyangga jepit (Gambar 7.4a) dihitung menjadi

$$H_D = 8 \text{ kips} \quad V_D = 40 \text{ kips} \quad M_D = 40(12) - 8(8) = 416 \text{ ft-kips}$$



GAMBAR 7.4. Kerangka kaku dari Contoh Soal 7.2.

Luas-luas momen dimodifikasi dihitung dari diagram momen dari Gambar 7.4b dan diperlihatkan dalam Gambar 7.4c; jadi

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}(\frac{64}{3})(16) = \frac{1024}{9} & A_2 &= \frac{64}{3}(20) = 256 \\ A_3 &= \frac{1}{2}(\frac{480}{3})(12) = 576 & A_4 &= \frac{1}{2}(\frac{244}{2})(16) = 2176 \\ A_5 &= \frac{1}{2}(\frac{416}{2})(16) = 1664 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan teorema luas-momen terhadap kurva elastik DC' dalam Gambar 7.4d,

$$\begin{aligned} EI_c \theta_C &= A_4 + A_5 = 2176 + 1664 = 3840 \\ CC' &= \frac{1}{EI_c} [A_4(\frac{16}{3}) + A_5(\frac{32}{3})] = \frac{88064}{3EI_c} = BB_1 \end{aligned}$$

Dari gambar geometrik kurva elastik $C'B'$.

$$\begin{aligned} EI_c \theta_B &= EI_c \theta_C + A_2 + A_3 = 3840 + 256 + 576 = 4672 \\ B_1B' &= 20\theta_C + \frac{A_2}{EI_c}(10) + \frac{A_3}{EI_c}(16) \\ &= \frac{1}{EI_c} [20(3840) + 256(10) + 576(16)] = \frac{88576}{EI_c} = A_1A' \end{aligned}$$

Dari kurva elastik $B'A'$,

$$\begin{aligned} AA_1 &= A_2A_3 + A_3A' - BB_1 = 16\theta_B + \frac{A_1}{EI_c}(12) - \frac{88064}{3EI_c} \\ &= \frac{1}{EI_c} \left[16(4672) + \frac{1024}{9}(12) - \frac{88064}{3} \right] = \frac{140288}{3EI_c} \text{ k-ft}^3 \end{aligned}$$

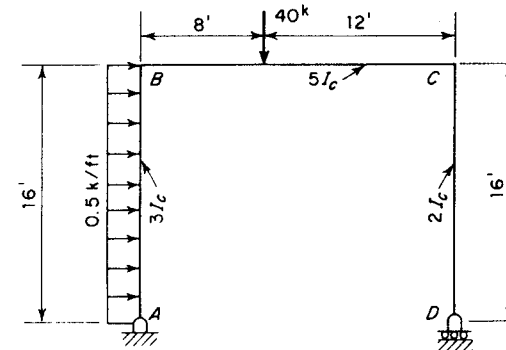
Bila yang dipergunakan adalah cara beban-satuan, ungkapan-ungkapan untuk M , m untuk Δ_H dari A , dan m untuk Δ_V dari A diambil dari Gambar 7.4a, e, dan f.

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_H \text{ dari } A &= \int \frac{Mmdx}{EI} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{16} \left(-\frac{0.5x^2}{2} \right) (-x) dx + \frac{1}{3} \int_0^8 (-64)(-16) dx \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^{12} (-64 - 40x)(-16) dx + \frac{1}{2} \int_0^{16} (416 + 8x)(x) dx \\ &= \frac{4096}{3} + 1638.4 + 11673.6 + \frac{96256}{3} = \frac{140288}{3} \text{ k-ft}^3 \text{ (cocok)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI_c \Delta_V \text{ dari } A &= \int \frac{Mmdx}{EI} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^8 (-64)(-x) dx + \frac{1}{3} \int_0^{12} (-64 - 40x)[- (x + 8)] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{16} (416 + 8x)(20) dx \\ &= 409.6 + (1228.8 + 5529.6 + 4608) + (66560 + 10240) \\ &= 88576 \text{ k-ft}^3 \text{ (cocok)} \end{aligned}$$

LATIHAN 7.1

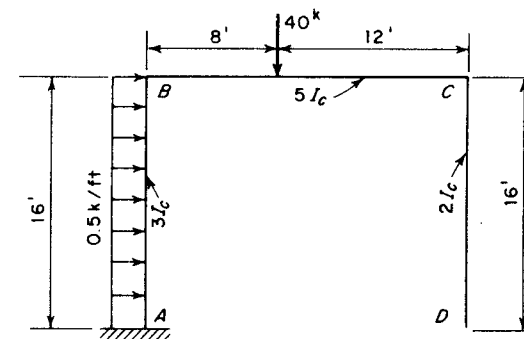
Tentukan lendutan horisontal dari penyangga rol di D dari kerangka kaku statik tertentu $ABCD$ (Gambar 7.5), pertama dengan luas momen/cara balok-terpadu; kemudian dengan cara beban-satuan.



GAMBAR 7.5. Latihan 7.1.

LATIHAN 7.2.

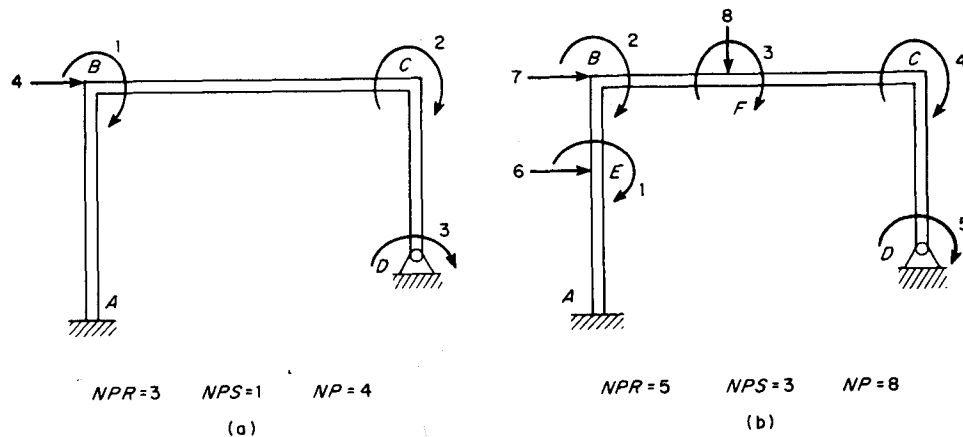
Tentukan perputaran, lendutan horisontal, dan lendutan vertikal dari ujung bebas D dari konsol kerangka kaku $ABCD$ (Gambar 7.6), pertama dengan cara luas-momen, kemudian dengan cara beban-satuan.



GAMBAR 7.6. Latihan 7.2.

7.3 Derajat Kebebasan dibanding Derajat Ketidaktertentuan (Degree of Freedom vs. Degree of Indeterminacy)

Derajat kebebasan dari sebuah kerangka kaku tergantung dari jumlah batang-batang dan simpul-simpul yang diambil dalam prosedur perhitungan-perhitungan karena pengaruh dari penambahan sebuah simpul sebarang pada sebuah batang lurus adalah sekedar menambah sebuah batang tambahan. Misalnya, meskipun dua kerangka kaku yang diperlihatkan dalam Gambar 7.7a dan b adalah tepat identik, yang satu boleh dipandang memiliki empat simpul dan tiga batang, sedang yang lainnya, enam simpul dan lima batang.



GAMBAR 7.7. Derajat kebebasan dari Kerangka Kaku.

Adalah mudah mengamati jumlah dari perputaran-perputaran simpul yang tidak diketahui NPR , tetapi dalam menentukan jumlah dari lendutan-lendutan simpul yang tidak diketahui yang independen NPS , penting diingat dua anggapan dasar yang telah disebutkan di muka, yaitu bahwa perubahan bentuk aksial diabaikan, dan bahwa perpindahan ujung yang melintang tidak mempengaruhi panjang batang. Jadi, dalam Gambar 7.7a lendutan-lendutan simpul yang tidak diketahui hanyalah salah satu simpul B atau C ; dalam Gambar 7.7b tiga lendutan simpul yang tidak diketahui adalah lendutan horisontal dari E , lendutan vertikal dari F , dan lendutan horisontal dari salah satu simpul-simpul B , F , atau C .

Derajat kebebasan NP dari sebuah kerangka kaku adalah tergantung dari baik jumlah perputaran simpul yang tidak diketahui maupun dari jumlah lendutan simpul independen yang tidak diketahui; atau

$$(7.3.1) \quad NP = NPR + NPS$$

Bila perubahan bentuk aksial diabaikan pada perhitungan, gaya-gaya aksial dalam batang-batang suatu kerangka kaku tergantung dari momen-momen ujung batang dan dapat dihitung berdasarkan pada hukum-hukum statika. Ini mensyaratkan bahwa sejumlah persamaan-persamaan uraian dari kesetimbangan tersedia untuk menentukan gaya-gaya aksial yang tidak dikenal. Misalkan

NM = jumlah batang-batang

j = jumlah dari simpul-simpul termasuk penyangga-penyangga

f = jumlah dari penyangga-penyangga terjepit

h = jumlah dari penyangga-penyangga sendi

r = jumlah dari penyangga-penyangga rol

Jumlah keseluruhan dari persamaan-persamaan uraian adalah $2j$; dari sini dibutuhkan sejumlah $(2f + 2h + r)$ persyaratan-persyaratan untuk mendapatkan reaksi-reaksi gaya linear, dan sejumlah NPS persyaratan-persyaratan sebagai persyaratan-persyaratan kesetimbangan dalam hubungan satu lawan satu dengan lendutan-lendutan simpul yang tidak diketahui; jadi persamaan-persamaan yang tersisa dapat dihubungkan dalam persamaan dengan gaya-gaya aksial yang tidak dikenal NM , atau

$$2j - (2f + h + r) - NPS = NM$$

dari mana

$$(7.3.2) \quad NPS = 2j - (2f + 2h + r) - NM$$

Umumnya adalah lebih disenangi untuk membuat penelitian secara grafis terhadap jumlah dari lendutan-lendutan simpul independen yang disyaratkan untuk mendapatkan pandangan umum dari kedudukan-kedudukan semua simpul-simpul yang terlendut dan memeriksa jumlah ini terhadap yang dihasilkan dari Persamaan (7.3.2).

Karena sekarang telah ditegaskan bahwa gaya-gaya internal independen yang tidak diketahui hanyalah dua momen ujung yang bekerja pada tiap batang, jumlah keseluruhan dari gaya-gaya internal menjadi

$$(7.3.3) \quad NF = 2 * NM$$

Jumlah dari derajat ketidaktertentuan i adalah jumlah kelebihan dari gaya-gaya internal terhadap jumlah dari persamaan-persamaan statika atau

$$(7.3.4) \quad i = NF - NP = 2 * NM - (NPR + NPS)$$

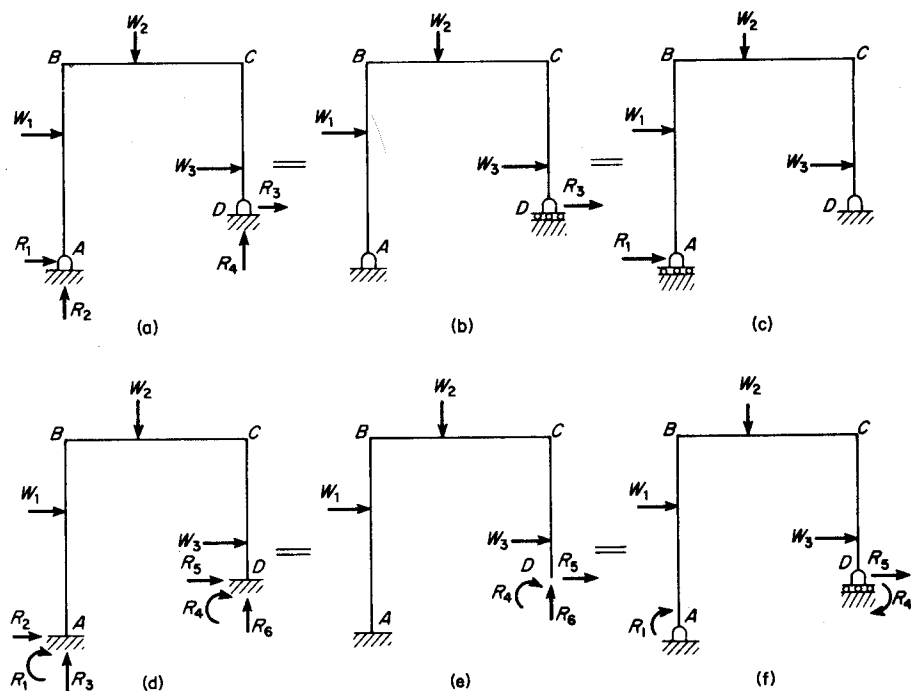
Persamaan (7.3.4) adalah berguna untuk menguji jumlah dari gaya-gaya kelebihan yang digunakan dalam cara analisis gaya.

7.4 Cara Gaya—Reaksi-reaksi sebagai Gaya-gaya Kelebihan

Suatu cara yang lazim untuk menghitung kerangka-kerangka kaku statik tidak tertentu yang sederhana adalah penerapan dari persyaratan-persyarat-kesepadanan untuk menyelesaikan reaksi-reaksi kelebihan, yang jumlahnya adalah sama dengan derajat ketidaktertentuan. Untuk kerangka kaku $ABCD$ yang diperlihatkan dalam Gambar 7.8a,

$$i = 2 * NM - (NPR + NPS) = 6 - (4 + 1) = 1$$

Kerangka kaku dengan penyangga-penyangga dua sendi dapat dipandang sebagai ekuivalen dengan kerangka-kerangka yang mempunyai derajat lebih rendah dari Gambar 7.8b atau c yang masing-masing menahan beban-beban $W_1-W_2-W_3$ dan reaksi kelebihan yang sehubungan, R_3 atau R_1 . Reaksi kelebihan (R_3 dalam Gambar 7.8b atau R_1 dalam Gambar 7.8c) dapat diselesaikan berdasarkan keadaan sepadan sehingga lendutan horizontal dari penyangga rol (di D dalam Gambar 7.8b atau di A dalam Gambar 7.8c) haruslah sama dengan nol.



GAMBAR 7.8. Cara Gaya dari Analisis Kerangka Kaku.

Sama halnya, tiga persyaratan kesepadanan dalam Gambar 7.8e adalah bahwa $R_4-R_5-R_6$ bersama dengan beban-beban $W_1-W_2-W_3$ harus membuat perputaran, lendutan horisontal, lendutan vertikal nol di D tetapi dalam Gambar 7.8f, $R_1-R_2-R_5$ bersama dengan beban-beban $W_1-W_2-W_3$ seharusnya menyebabkan perputaran nol di A , perputaran nol di D , dan lendutan horisontal nol di D .

Cara gaya untuk menganalisis kerangka-kerangka kaku statik tidak tertentu menyangkut perhitungan-perhitungan dari perputaran-perputaran simpul atau lendutan-lendutan dari kerangka-kerangka kaku statik tertentu dengan derajat lebih rendah; pertama adalah akibat dari beban-beban kerja dan lainnya adalah akibat dari setiap gaya-gaya kelebihan. Perpindahan-perpindahan simpul dapat diperoleh baik dengan luas momen/cara balok terpadu, maupun dengan cara beban-satuan, atau kedua-duanya.

Perlu disadari bahwa momen-momen ujung batang dapat dipergunakan sebagai gaya-gaya kelebihan bukannya sebagai reaksi-reaksi. Pendekatan ini dapat berguna untuk pelajaran lanjutan dari pengontrolan momen-momen pada beberapa titik yang dipilih untuk mendapat sifat paling menguntungkan dari seluruh struktur. Dalam teks elementair ini, adalah cukup untuk menekankan konsep dari cara gaya dengan pengetrapannya pada bentangan tunggal, kerangka-kerangka kaku bertingkat satu.

Contoh Soal 7.3. Analisislah kerangka kaku dari Gambar 7.9a, dengan menggunakan reaksi horisontal di A sebagai gaya kelebihan. Gambarkan diagram-diagram gaya geser dan momen dan hitung perpindahan-perpindahan simpul dalam kurva elastik akhir.

Penyelesaian. Kerangka kaku dengan derajat lebih rendah dari Gambar 7.9b mempunyai penyangga sebuah rol di A dan menahan beban. Beban kerja dan gaya horisontal H_A . Lendutan horisontal di A akibat beban-beban kerja: dapat ditulis kembali dari hasil dari Contoh 7.1 sebagai

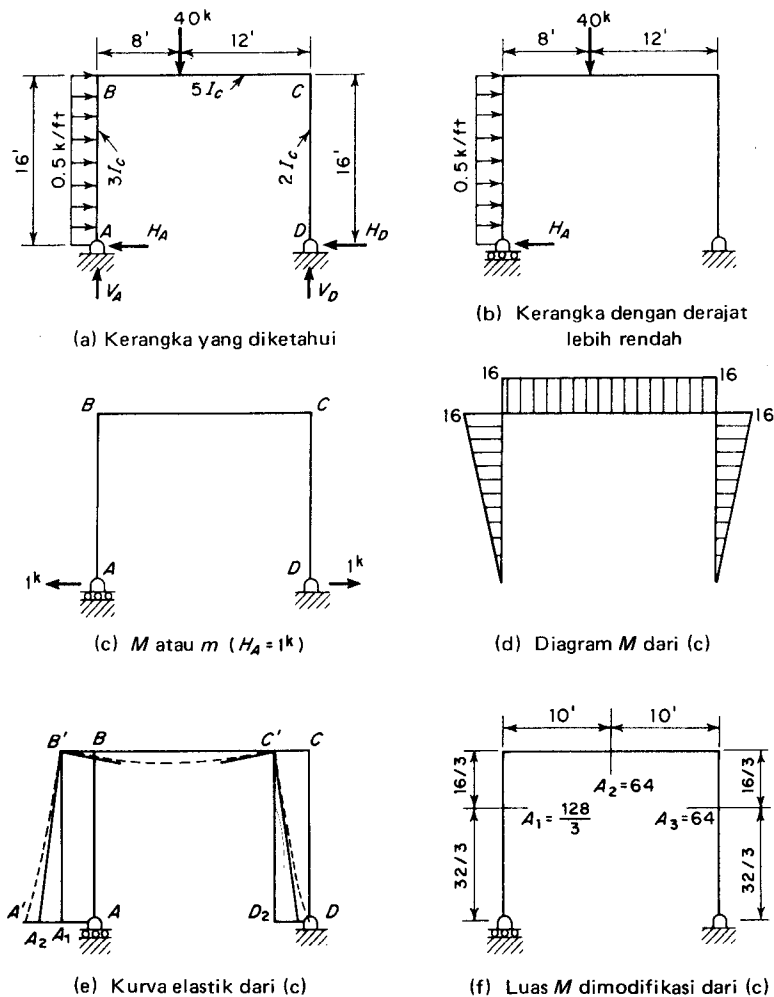
$$\Delta_H \text{ di } D \text{ akibat dari beban-beban} = \frac{20480}{3EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke kanan)}$$

Lendutan horisontal di A akibat dari $H_A = 1$ kip dapat dihitung dengan cara luas momen/cara balok terpadu dengan merujuk pada Gambar 7.9c, d, e dan f.

$$EI_c \theta_B = EI_c \theta_C = \frac{1}{2} A_2 = 32$$

$$D_2 D = D_2 D_1 + D_1 D = 16 \theta_C + \frac{A_3}{EI_c} \left(\frac{32}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{EI_c} \left[16(32) + 64 \left(\frac{32}{3} \right) \right] = \frac{3584}{3EI_c} = CC' = BB'$$



GAMBAR 7.9. Cara Gaya dari Analisis Kerangka Kaku (Contoh Soal 7.3).

$$\begin{aligned}
 AA' &= AA_1 + A_1A_2 + A_2A' = BB' + 16\theta_B + \frac{A_1}{EI_c} \left(\frac{32}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{EI_c} \left[\frac{3584}{3} + 16(32) + \frac{128}{3} \left(\frac{32}{3} \right) \right] = \frac{19456}{9EI_c}
 \end{aligned}$$

atau, dengan mengambil m dari Gambar 7.9e dan menggunakan cara beban-satuan,

$EI_c \Delta_H$ di A akibat dari $H_A = 1$ kip

$$= \frac{1}{3} \int_0^{16} (x)^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^{20} (16)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{16} (-x)^2 dx = \frac{19456}{9} \text{ k-ft}^3$$

Menerapkan persyaratan kesepadanan bahwa lendutan di A dari kerangka dengan derajat lebih rendah haruslah sama dengan nol.

$$\frac{20480}{3} - \frac{19456}{9} H_A = 0$$

dari mana

$$H_A = \frac{60}{19} = 3.158 \text{ kips (ke kanan)}$$

Dengan menerapkan hukum-hukum statika terhadap kerangka yang diketahui dari Gambar 7.9a,

$$H_D = 8 - 3.158 = 4.842 \text{ kips}$$

$$V_A = \frac{40(12) - 8(8)}{20} = 20.8 \text{ kips}$$

$$V_D = \frac{40(8) + 8(8)}{20} = 19.2 \text{ kips}$$

Setelah mendapatkan reaksi-reaksi, penghitung haruslah menggambar diagram-diagram gaya geser dan momen dan menghitung perpindahan-perpindahan titik simpul dalam kurva elastik akhir seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.10. Nilai-nilai momen pada kedudukan-kedudukan kritis yang diperlihatkan dalam Gambar 7.10c adalah dihitung dengan cara menjumlahkan luas-luas gaya geser yang diperlihatkan dalam Gambar 7.10b.

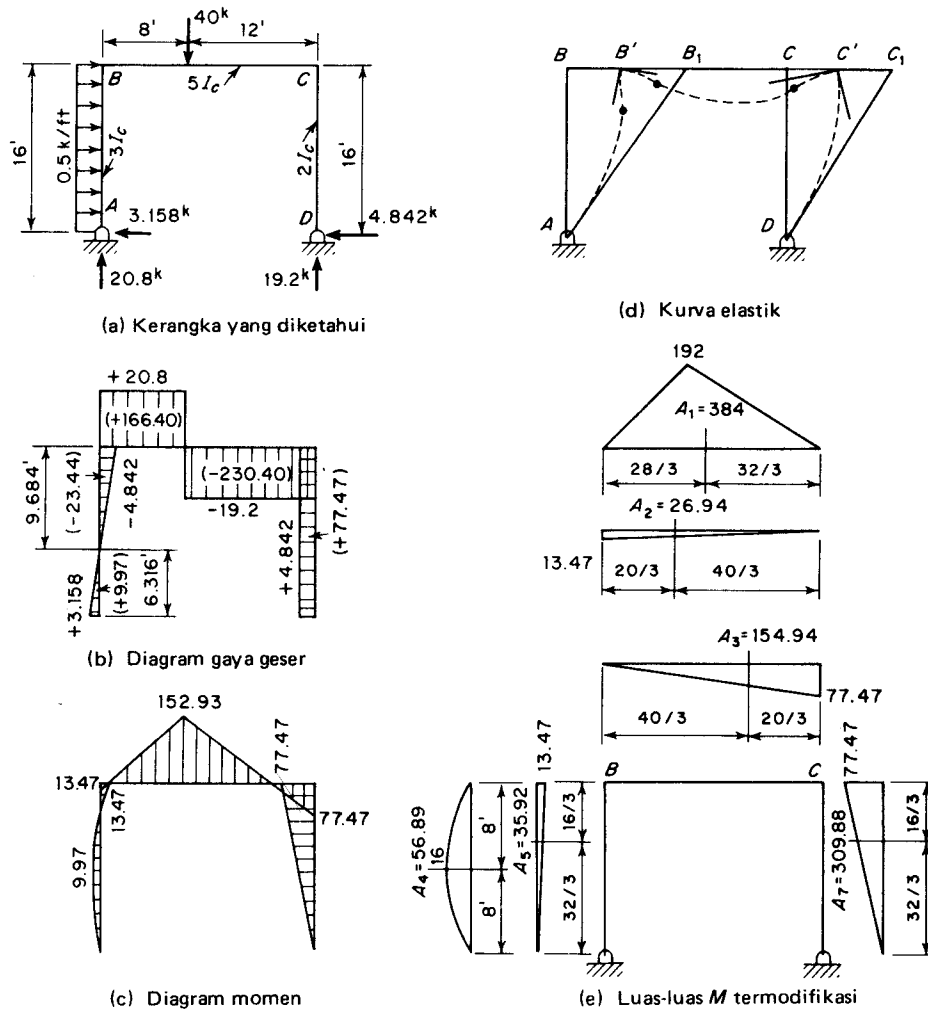
Perhatikan bagaimana kurva elastik dari Gambar 7.10d disketsa untuk dicocokkan dengan diagram momen dari Gambar 7.10c. Nilai-nilai kritis dari kurva elastik dapat dihitung dengan urutan sebagai berikut:

1) Hitung θ_B dan θ_C dengan menerapkan Teorema Balok-Terpadu I terhadap $B'C'$;

$$\begin{aligned}
 EI_c \theta_B &= \frac{32}{60} A_1 - \frac{2}{3} A_2 - \frac{1}{3} A_3 = \frac{32}{60}(384) - \frac{2}{3}(26.94) - \frac{1}{3}(154.94) \\
 &= 135.19 \text{ k-ft}^2 \text{ (searah dengan arah jarum jam)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI_c \theta_C &= \frac{28}{60} A_1 - \frac{1}{3} A_2 - \frac{2}{3} A_3 = \frac{28}{60}(384) - \frac{1}{3}(26.94) - \frac{2}{3}(154.94) \\
 &= 66.93 \text{ k-ft}^2 \text{ (berlawanan arah jarum jam)}
 \end{aligned}$$

2) Hitung θ_A dan θ_D dengan menerapkan Teorema Luas-Momen I terhadap masing-masing $B'A'$ dan $D'C'$;



GAMBAR 7.10. Kurva Elastik dan Pengecekan Kesepadanan (Contoh Soal 7.3).

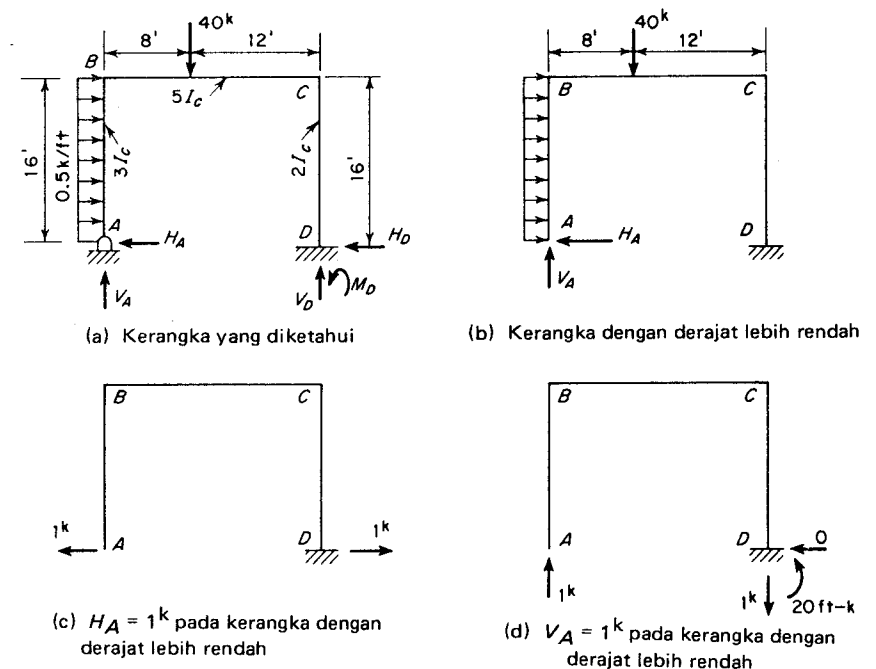
$$\begin{aligned}
 EI_c \theta_A &= EI_c \theta_B + A_4 - A_5 = 135.19 + 56.89 - 35.92 \\
 &= 156.16 \text{ k-ft}^2 \text{ (searah dengan jarum jam)} \\
 EI_c \theta_D &= A_6 - EI_c \theta_C = 309.88 - 66.93 \\
 &= 242.95 \text{ k-ft}^2 \text{ (searah dengan jarum jam)}
 \end{aligned}$$

3) Hitung BB' dan CC' dengan menerapkan Teorema Luas-Momen II terhadap $A'B'$ dan $D'C'$;

$$\begin{aligned}
 BB' &= BB_1 - B_1B' = 16\theta_A - \frac{A_4}{EI_c}(8) + \frac{A_5}{EI_c}\left(\frac{16}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{EI_c}[16(156.16) - 56.89(8) + 35.92(16/3)] = \frac{2235.0}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \\
 CC' &= CC_1 - C_1C' = 16\theta_D - \frac{A_6}{EI_c}\left(\frac{16}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{EI_c}[16(242.95) - 309.88(16/3)] = \frac{2234.5}{EI_c} \text{ k-ft}^3
 \end{aligned}$$

Kenyataan bahwa BB' dan CC' adalah sama, seperti telah dihitung secara terpisah, meyakinkan bahwa keadaan kesepadanan untuk struktur tidak tertentu-tunggal telah terpenuhi.

Contoh Soal 7.4. Analisislah kerangka kaku dalam Gambar 7.11a dengan menggunakan reaksi-reaksi horisontal dan vertikal di A sebagai gaya-gaya kelebihan. Gambar diagram-diagram gaya geser dan momen dan hitung perpindahan-perpindahan simpul dalam kurva elastik akhir.



GAMBAR 7.11. Cara Gaya dari Analisa Kerangka Kaku (Contoh 7.4).

Penyelesaian. Kerangka konsol dengan derajat lebih rendah pada Gambar 7.11b mempunyai sebuah penyangga terjepit di D dan menahan beban-beban kerja dan dua gaya kelebihan H_A dan V_A . Lendutan-lendutan horisontal dan vertikal di A akibat dari beban-beban kerja dapat diungkap ulang dari hasil-hasil dari Contoh 7.2:

$$\Delta_H \text{ di } A \text{ akibat dari beban-beban} = \frac{140288}{3EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke kanan)}$$

$$\Delta_V \text{ di } A \text{ akibat dari beban-beban} = \frac{88576}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke bawah)}$$

Akibat dari $H_A = 1$ kip bekerja pada kerangka dengan derajat lebih rendah,

Δ_H di A akibat dari ($H_A = 1$ kip)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(M \text{ dalam Gambar 7.11c})(m \text{ dalam Gambar 11c}) dx}{EI} \\ &= \frac{1}{3EI_c} \int_0^{16} (x)^2 dx + \frac{1}{5EI_c} \int_0^{20} (16)^2 dx + \frac{1}{2EI_c} \int_0^{16} (-x)^2 dx \\ &= \frac{19456}{9EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke kiri)} \end{aligned}$$

Δ_V di A akibat dari ($H_A = 1$ kip)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(M \text{ dalam Gambar 7.11c})(m \text{ dalam Gambar 7.11d}) dx}{EI} \\ &= \frac{1}{5EI_c} \int_0^{20} (16)(x) dx + \frac{1}{2EI_c} \int_0^{16} (-x)(-20) dx \\ &= \frac{1920}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke atas)} \end{aligned}$$

Akibat dari $V_A = 1$ kip bekerja pada kerangka dengan derajat lebih rendah,

Δ_H di A akibat dari ($V_A = 1$ kip)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(M \text{ dalam Gambar 7.11d})(m \text{ dalam Gambar 7.11c}) dx}{EI} \\ &= \frac{1}{5EI_c} \int_0^{20} (x)(16) dx + \frac{1}{2EI_c} \int_0^{16} (-20)(-x) dx \\ &= \frac{1920}{EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke kiri)} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa Δ_V di A akibat dari $H_A = 1$ kip adalah sama dengan Δ_H di A akibat dari $V_A = 1$ kip karena M dan m hanya ditukar satu sama lainnya dalam rumus beban-satuan. Sebuah perlakuan yang lebih umum terhadap Hukum Lenturan Timbal-Balik dipaparkan dalam Bab 8.

Δ_V di A akibat dari ($V_A = 1$ kip)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(M \text{ dalam Gambar 7.11d})(m \text{ dalam Gambar 7.11d}) dx}{EI} \\ &= \frac{1}{5EI_c} \int_0^{20} (x)^2 dx + \frac{1}{2EI_c} \int_0^{16} (-20)^2 dx \\ &= \frac{11200}{3EI_c} \text{ k-ft}^3 \text{ (ke atas)} \end{aligned}$$

Dengan menerapkan kedua persyaratan-persyaratan kesepadanan bahwa lendutan-lendutan horisontal dan vertikal di A dari kerangka dengan derajat lebih rendah akibat dari beban-beban terpakai dan gaya-gaya sisa H_A dan V_A keduanya haruslah sama dengan nol.

$$\begin{aligned} &+ \frac{140288}{3EI_c} - \frac{19456}{9EI_c} H_A - \frac{1920}{EI_c} V_A = 0 \\ &- \frac{88576}{EI_c} + \frac{1920}{EI_c} H_A + \frac{11200}{3EI_c} V_A = 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan di atas,

$$H_A = 1.030 \text{ kips (ke kiri)}$$

$$V_A = 23.196 \text{ kips (ke atas)}$$

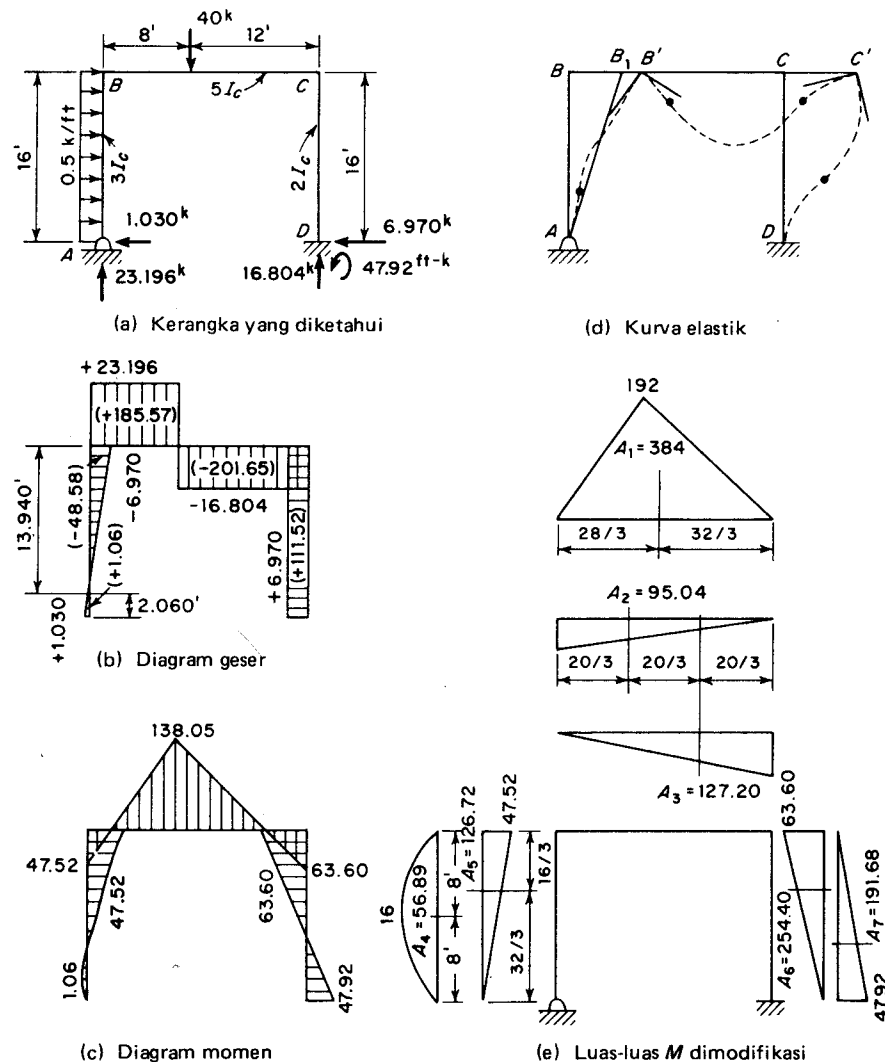
Dengan menerapkan hukum-hukum statika terhadap kerangka yang diberikan pada Gambar 7.11a

$$H_D = 8 - 1.030 = 6.970 \text{ kips (ke kiri)}$$

$$V_D = 40 - 23.196 = 16.804 \text{ kips (ke atas)}$$

$$M_D = 40(8) + 8(8) - 16.804(20) = 47.92 \text{ ft-kips (berlawanan arah jarum jam)}$$

Diagram-diagram bagian lepas, gaya dan momen dari kerangka yang diketahui diperlihatkan dalam Gambar 7.12i, b dan c. Catat bahwa proses untuk menentukan nilai-nilai kritis pada diagram momen dengan cara menjumlahkan luas-luas geser, sebuah pemeriksaan diperoleh dari momen di D yang kenyataannya adalah sama dengan 47,92 ft-kips menyebabkan tekan pada bagian kanan dari batang DC .



GAMBAR 7.12. Kurva Elastik dan Pengecekan Kesepadanan (Contoh Soal 7.4).

Dengan memandang kurva elastik yang diperlihatkan dalam Gambar 7.12c, θ_B dan θ_C pertama-tama dihitung dengan menerapkan Teorema Balok-Terpadu I terhadap $B'C'$; jadi

$$EI_c \theta_B = \frac{32}{60} A_1 - \frac{2}{3} A_2 - \frac{1}{3} A_3 = \frac{32}{60} (384) - \frac{2}{3} (95.04) - \frac{1}{3} (127.20) = 99.04 \text{ k-ft}^2 \text{ (searah jarum jam)}$$

$$EI_c \theta_C = \frac{28}{60} A_1 - \frac{1}{3} A_2 - \frac{2}{3} A_3 = \frac{28}{60} (384) - \frac{1}{3} (95.04) - \frac{2}{3} (127.20) = 62.72 \text{ k-ft}^2 \text{ (berlawanan arah jarum jam)}$$

Dengan menerapkan kedua teorema luas-momen terhadap $B'A'$,

$$EI_c \theta_A = EI_c \theta_B + A_4 - A_5 = 99.04 + 56.89 - 126.72 = 29.21 \text{ k-ft}^2 \text{ (searah jarum jam)}$$

$$EI_c (BB') = EI_c (BB_1 + B_1 B') = 16(EI_c \theta_A) - 8A_4 + \frac{1}{3} A_5 = 16(29.21) - 8(56.89) + \frac{1}{3} (126.72) = 688.08 \text{ k-ft}^3 \text{ (ke kanan)}$$

Dengan menerapkan kedua teorema luas momen dari penyangga terjepit di D terhadap C' ,

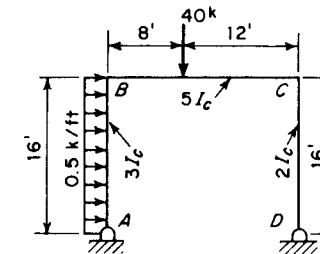
$$EI_c \theta_C = A_6 - A_7 = 254.40 - 191.68 = 62.72 \text{ k-ft}^2 \text{ (berlawanan arah jarum jam)}$$

$$EI_c (CC') = \frac{32}{3} A_7 - \frac{1}{3} A_5 = \frac{32}{3} (191.68) - \frac{1}{3} (254.40) = 687.79 \text{ k-ft}^3 \text{ (ke kiri)}$$

Kedua pemeriksaan kesepadanan yang diperoleh di sini adalah: 1) θ_C yang dihitung dari $B'C'$ adalah sama dengan θ_C dihitung dalam DC' ; 2) BB' yang dihitung dari AB' adalah sama dengan CC' yang dihitung dari DC' . Perhatikan bahwa jumlah dari pemeriksaan-pemeriksaan kesepadanan haruslah sama dengan derajat ketidaktertentuan.

LATIHAN 7.3

Analisislah kerangka kaku dengan dua penyangga-penyangga sendi (Gambar 7.13) dengan mempergunakan reaksi horisontal di D sebagai gaya sisa. Rujuklah kepada Latihan 7.1 untuk lendutan horisontal di D dari struktur dengan derajat lebih rendah akibat beban-beban terpakai. Rujuklah pada Contoh 7.3 untuk diagram momen dan kurva elastik.

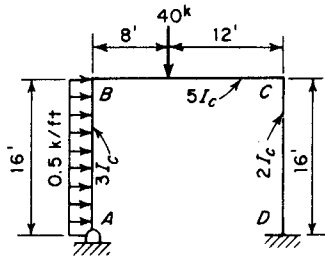


GAMBAR 7.13. Latihan 7.3.

LATIHAN 7.4

Analisislah kerangka kaku dengan satu penyangga terjepit dan satu penyangga sendi (Gambar 7.14) dengan mempergunakan reaksi horisontal

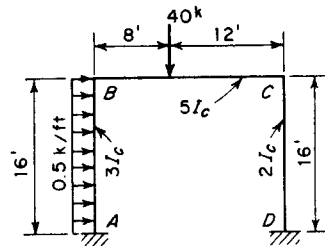
di A dan reaksi momen di D sebagai gaya-gaya sisa. Rujuklah kepada Contoh 7.1 untuk perputaran-perputaran simpul dan lendutan dari struktur dengan derajat lebih rendah akibat dari beban-beban terpakai. Rujuklah kepada Contoh 7.4 untuk diagram momen dan kurva elastik.



GAMBAR 7.14. Latihan 7.4.

LATIHAN 7.5

Analisislah kerangka kaku dengan dua penyangga terjepit (Gambar 7.15) dengan mempergunakan reaksi horisontal, reaksi vertikal, dan reaksi momen di D sebagai gaya-gaya kelebihan. Gambarkan diagram-diagram gaya geser dan momen dan hitung perpindahan-perpindahan simpul dalam kurva elastik akhir.



GAMBAR 7.15. Latihan 7.5.

7.5 Cara Lendutan-Kelandaian (Slope-Deflection Method) dibanding Cara Perpindahan-Matriks (Matrix-Displacement Method)

Cara lendutan-kelandaian dan cara perpindahan-matriks adalah hampir identik; perbedaan satu-satunya antara keduanya terletak pada apakah persamaan-persamaan aljabar dibentuk secara konvensional atau dalam bentuk matriks. Untuk memaparkan kesamaan dari kedua cara ini, adalah lebih baik menyelesaikan notasi-notasi dalam persamaan-persamaan lendutan-kelandaian

an (6.6.6a dan b), seperti diperlihatkan di bawah, yakni ke dalam cara perpindahan matriks.

$$M_A = M_{0A} + \frac{4EI}{L}(\theta_A - R) + \frac{2EI}{L}(\theta_B - R)$$

$$M_B = M_{0B} + \frac{2EI}{L}(\theta_A - R) + \frac{4EI}{L}(\theta_B - R)$$

Dengan merujuk kepada Gambar 7.16, persamaan-persamaan lendutan-kelandaian dapat diungkapkan sebagai

$$(7.5.1a) \quad F_i^* = F_{0i} + \frac{4EI}{L}e_i + \frac{2EI}{L}e_j$$

$$(7.5.1b) \quad F_j^* = F_{0j} + \frac{2EI}{L}e_i + \frac{4EI}{L}e_j$$

di mana

$$(7.5.1c) \quad e_i = X_A - \frac{\Delta}{L}$$

$$(7.5.1d) \quad e_j = X_B - \frac{\Delta}{L}$$

Dalam persamaan-persamaan ini huruf-huruf "i" dan "j" merujuk kepada ujung-ujung batang, di mana ujung batang "i" memasuki simpul A dengan perputaran X_A , dan ujung batang "j" memasuki simpul B dengan perputaran X_B .

Persamaan-persamaan (7.5.1a dan b) kenyataannya adalah persamaan matriks

$$\{F^*\}_{2 \times 1} = \{F_0\}_{2 \times 1} + [S]_{2 \times 2}\{e\}_{2 \times 1}$$

karena batang ij dan Persamaan-persamaan (7.5.1c dan d) kenyataannya adalah persamaan matriks

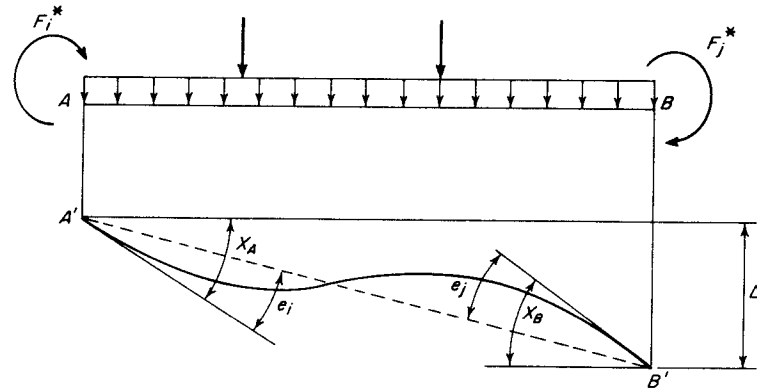
$$\{e\}_{2 \times 1} = [B]_{2 \times 1}\{X\}_{3 \times 1}$$

untuk batang ij .

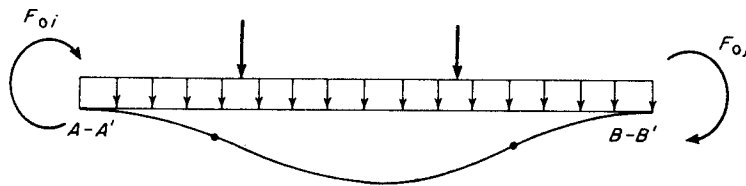
Persyaratan-persyaratan kesetimbangan, yang jumlahnya sama dengan derajat kebebasan atau jumlah dari perputaran-perputaran simpul yang tidak diketahui dan lendutan-lendutan, dalam kenyataannya adalah, baris-baris dari persamaan matriks $\{P\} = [A]\{F\}$. Dalam cara lendutan-kelandaian, persamaan-persamaan ini dinyatakan dalam momen-momen ujung jumlah $\{F^*\}$; tetapi dalam cara perpindahan matriks; persyaratan-persyaratan yang sama dipenuhi dengan mempersamakan perlawanan $\{AF\}$ yang diperoleh dari momen-momen ujung $\{F\}$ dengan gaya-gaya simpul aktif $\{P\}$ ke arah-arrah dari derajat kebebasan, di mana pula gaya-gaya simpul aktif ada-

lah berhadapan dengan gaya-gaya simpul yang menjepit yang diperlukan untuk mempertahankan $\{X\} = 0$ dalam keadaan terjepit. Jadi persamaan matriks $\{P\} = [ASA^T]\{X\}$ berisikan persamaan-persamaan simultan dalam cara lendutan-kelandaian.

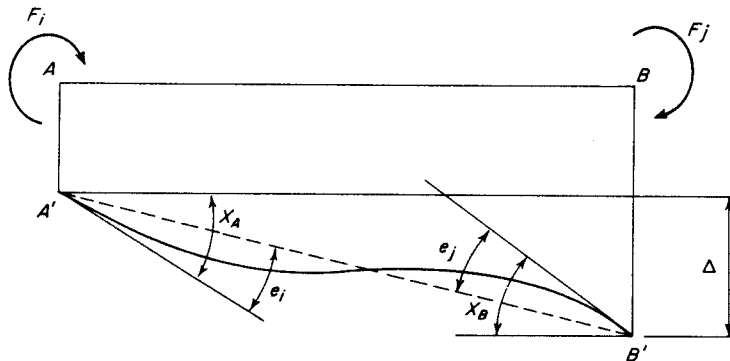
Cara perpindahan-matriks adalah lebih baik daripada cara lendutan-kelandaian karena yang terdahulu memisahkan beban-beban kerja dari pem-



(a) Keadaan jumlah



(b) Keadaan terjepit



(c) Keadaan simpul-gaya

GAMBAR 7.16. Pemisahan ke Keadaan-keadaan Terjepit dan Gaya-Simpul.

buatan matriks $[ASA^T]$. Bila ada beberapa keadaan pembebanan yang harus dianalisis adalah cukup diperlukan mengembangkan matriks kolom $\{P\}$ menjadi matriks persegi. Sebagai tambahan, cara perpindahan-matriks dapat secara mudah ditulis ke dalam sebuah program komputer, dengan mengambil $[A]$, $[S]$, $[F_0]$, dan $[P]$ sebagai masukan, dan memberikan $[X]$ dan $[F^*]$ sebagai hasil.

Dalam contoh berikut, kerangka kaku, yang telah diselesaikan dengan cara gaya dalam Contoh 7.3, sekarang akan dianalisis dengan cara lendutan-kelandaian dan cara perpindahan-matriks. Pembaca akan mencatat bahwa kedua cara-cara tersebut adalah sama baiknya dalam konsep maupun dalam pelaksanaan. Ilmu Gaya Kestimbangan akhir dan pengecekan-pengecekan perubahan bentuk tidak dibuat lagi karena telah ditampilkan dalam contoh yang disebut di muka.

Contoh Soal 7.5. Analisislah kerangka kaku dengan dua penyangga sendi dalam Contoh 7.3, pertama dengan cara lendutan-kelandaian, kemudian dengan cara perpindahan-matriks.

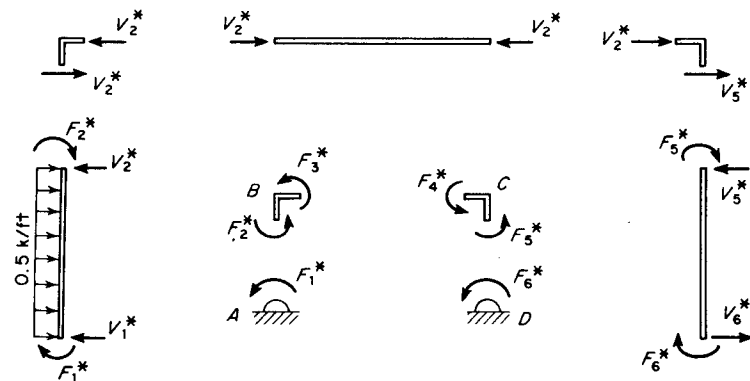
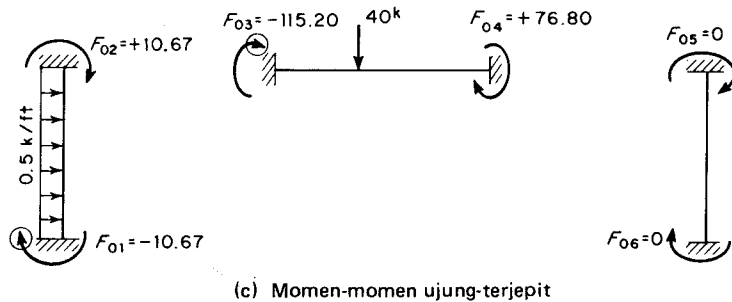
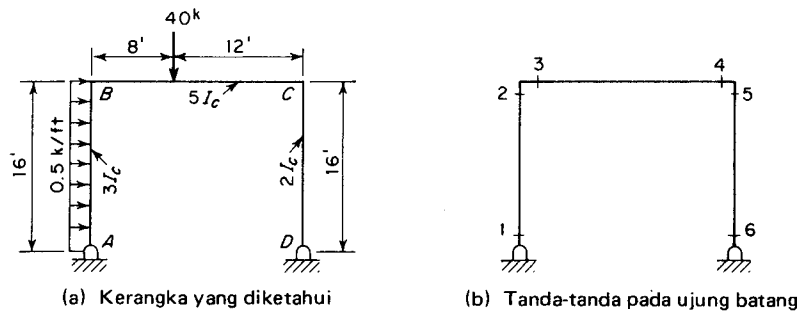
Penyelesaian. Dengan memandang bahwa kerangka yang diketahui dari Gambar 7.17a mempunyai tiga batang dan empat simpul, derajat kebebasan dalam perputaran adalah empat, dengan $\theta_A - \theta_B - \theta_C - \theta_D$ sebagai perputaran-perputaran simpul yang tidak diketahui; derajat kebebasan dari lendutan simpul independen adalah satu, dengan lendutan horisontal Δ dari simpul C sebagai lendutan yang tidak diketahui. Kita dapat memilih lendutan horisontal Δ dari simpul B sebagai lendutan independen yang tidak diketahui, tetapi kemudian persyaratan kesetimbangan haruslah dinyatakan oleh persamaan uraian horisontal dari kesetimbangan dari simpul B. Dengan menggunakan Persamaan (7.3.2).

$$NPS = 2j - (2f + 2h + r) - NM = 8 - (0 + 4 + 0) - 3 = 1$$

Persamaan-persamaan lendutan-kelandaian ditulis berdasarkan tanda-tanda pada ujung-batang dari Gambar 7.17t dan momen-momen ujung terjepit dari Gambar 7.17c. Dalam Gambar 7.17c, sebuah lingkaran digambar melingkari sebuah panah dengan arah searah jarum jam dari momen-momen ujung terjepit negatif untuk menandakan bahwa arah yang sesungguhnya adalah sebaliknya. Persamaan-persamaan kelandaian-lendutan adalah

$$F_1^* = -10.67 + \frac{4E(3I_c)}{16} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{16} \right) + \frac{2E(3I_c)}{16} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{16} \right)$$

$$F_2^* = +10.67 + \frac{2E(3I_c)}{16} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{16} \right) + \frac{4E(3I_c)}{16} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{16} \right)$$



(d) Persyaratan-persyaratan kesetimbangan yang cocok $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$ dan Δ dari C

GAMBAR 7.17. Cara Kelandaian-Lendutan (Contoh Soal 7.5).

$$F_3^* = -115.20 + \frac{4E(5I_c)}{20}(\theta_B) + \frac{2E(5I_c)}{20}(\theta_C)$$

$$F_4^* = +76.80 + \frac{2E(5I_c)}{20}(\theta_B) + \frac{4E(5I_c)}{20}(\theta_C)$$

$$F_5^* = 0 + \frac{4E(2I_c)}{16}\left(\theta_C - \frac{\Delta}{16}\right) + \frac{2E(2I_c)}{16}\left(\theta_D - \frac{\Delta}{16}\right)$$

$$F_6^* = 0 + \frac{2E(2I_c)}{16}\left(\theta_C - \frac{\Delta}{16}\right) + \frac{4E(2I_c)}{16}\left(\theta_D - \frac{\Delta}{16}\right)$$

Persyaratan-persyaratan kesetimbangan, dalam hubungan satu lawan satu dengan perputaran-perputaran simpul yang tidak diketahui dan lendutan, diperoleh dengan menambah momen-momen *berlawanan arah jarum jam* yang bekerja pada simpul-simpul A-B-C-D dan gaya-gaya di sebelah kiri yang bekerja pada simpul C dan penjumlahan-penjumlahan tersebut disamakan dengan nol. Jadi, dengan merujuk kepada diagram-diagram bagian lepas dari simpul-simpul dalam Gambar 7.17d,

$$F_1^* = 0.$$

$$F_2^* + F_3^* = 0.$$

$$F_4^* + F_5^* = 0.$$

$$F_6^* = 0.$$

$$-V_2^* - V_5^* = -\left(4.0 + \frac{F_1^* + F_2^*}{16}\right) - \left(\frac{F_5^* + F_6^*}{16}\right) = 0$$

Kelima persamaan simultan berikut ini diperoleh bila enam persamaan lendutan kelandaian disubstitusikan ke dalam kelima persyaratan kesetimbangan. Akan diperlihatkan kemudian bahwa persamaan-persamaan ini kenyataannya adalah identik dengan persamaan matriks $[ASA^T]\{X\} = \{P\}$. Juga, seperti dibuktikan terdahulu dalam Pasal 4.5, matriks

	$EI_c\theta_A$	$EI_c\theta_B$	$EI_c\theta_C$	$EI_c\theta_D$	$EI_c\Delta$	
1	+3/4	+3/8			-9/128	= +10.67
2	+3/8	+7/4	+1/2		-9/128	= +104.53
3		+1/2	+3/2	+1/4	-3/64	= -76.80
4			+1/4	+1/2	-3/64	= 0.00
5	-9/128	-9/128	-3/64	-3/64	+15/1024	= +4.00

$[K] = [ASA^T]$ adalah matriks kekakuan dari seluruh struktur dan adalah selalu simetrik. Dengan menyelesaikan kelima persamaan-persamaan simultan,

$$EI_c \theta_A = +156.16 \text{ k-ft}^2$$

$$EI_c \theta_B = +135.19 \text{ k-ft}^2$$

$$EI_c \theta_C = -66.93 \text{ k-ft}^2$$

$$EI_c \theta_D = +242.95 \text{ k-ft}^2$$

$$EI_c \Delta = +2234.8 \text{ k-ft}^3$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai dari perpindahan-perpindahan simpul ke dalam persamaan-persamaan lendutan-kelandaian,

$$F_1^* = -10.67 + \frac{1}{16}(+156.16 - \frac{2234.8}{16}) + \frac{6}{16}(+135.19 - \frac{2234.8}{16}) = +0.01 \approx 0.$$

$$F_2^* = +10.67 + \frac{6}{16}(+156.16 - \frac{2234.8}{16}) + \frac{1}{16}(+135.19 - \frac{2234.8}{16}) = +13.48 \text{ ft-kips}$$

$$F_3^* = -115.20 + \frac{2}{16}(+135.19) + \frac{1}{16}(-66.93) = -13.47 \text{ ft-kips}$$

$$F_4^* = +76.80 + \frac{1}{16}(+135.19) + \frac{2}{16}(-66.93) = +77.47 \text{ ft-kips}$$

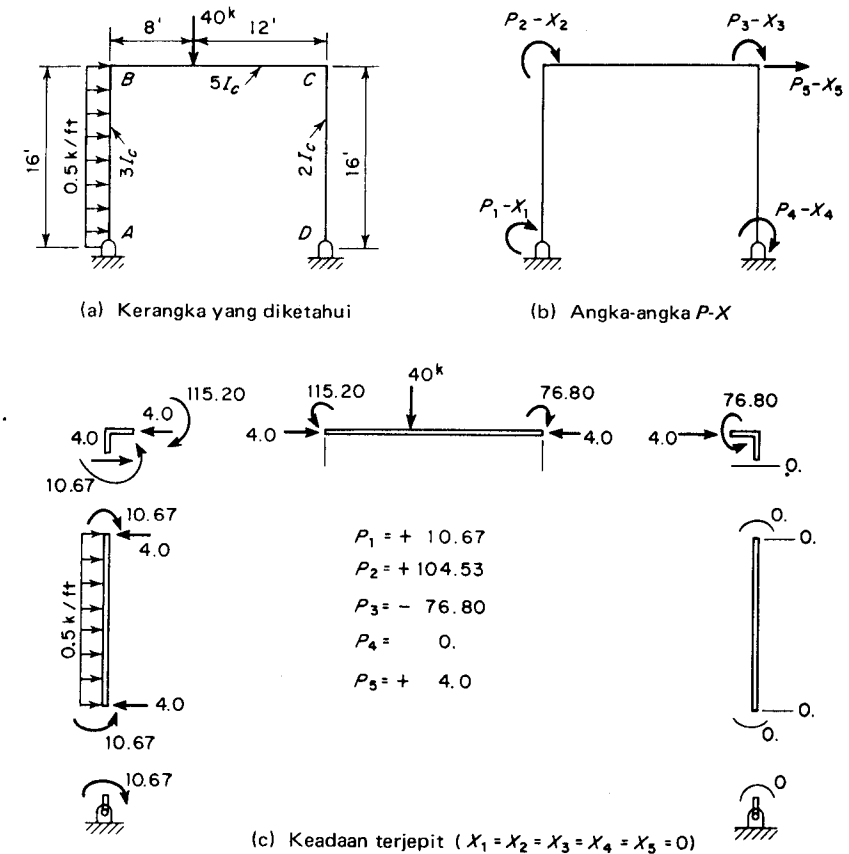
$$F_5^* = 0. + \frac{8}{16}(-66.93 - \frac{2234.8}{16}) + \frac{4}{16}(+242.95 - \frac{2234.8}{16}) = -77.48 \text{ ft-kips}$$

$$F_6^* = 0. + \frac{4}{16}(-66.93 - \frac{2234.8}{16}) + \frac{8}{16}(+242.95 - \frac{2234.8}{16}) = -0.01 \approx 0.$$

Dengan momen-momen ujung akhir ini, diagram-diagram gaya geser dan momen, juga nilai-nilai kritis pada kurva elastik, dapat ditentukan seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.10.

Bila digunakan cara perpindahan-matriks, tugas pertama adalah memindahkan beban-beban melintang yang bekerja pada batang-batang ke gaya-gaya simpul sepanjang derajat-derajat kebebasan. Hal ini dipengaruhi oleh penggunaan keadaan terjepit di mana semua perpindahan simpul adalah nol. seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.18. Di simpul A, tindakan dari simpul terhadap batang untuk mempertahankan $X_1 = 0$ adalah 10,67 ft-kips berlawanan arah jarum jam; jadi gaya aktif P_1 terhadap simpul adalah 10,67 ft-kips searah jarum jam atau $P_1 = +10,67$ ft-kips. Di simpul B, tindakan dari simpul terhadap kedua ujung batang untuk mempertahankan $X_2 = 0$ adalah ft-kips berlawanan arah jarum jam dan 10,67 ft-kips, atau jumlahnya adalah 104.53 ft-kips; jadi gaya aktif P_2 pada simpul adalah 104.53 ft-kips searah jarum jam atau $P_2 = +104.53$ ft-kips. Sama halnya $P_3 = -76,80$ ft-kips dan $P_4 = 0$.

Gaya aktif P_5 harus diperoleh di simpul C karena pada permulaan X_5 diambil sebagai lendutan horisontal pada simpul C. Dalam pengertian ini harus ada kesetimbangan horisontal di simpul B dalam keadaan terjepit. Jadi dalam Gambar 7.18c, jumlah dari gaya-gaya aktif ke kanan disimpul C adalah $P_5 = +4,0$ (dari batang CB) + 0,0 (dari batang CD) = +4,0 kips.



GAMBAR 7.18. Matriks $\{P\}$ dalam Contoh 7.5.

Matriks statika $[A]$ mengungkap kesetimbangan antara gaya-gaya simpul aktif $\{P\}$ dan perlawanan yang dilakukan oleh momen-momen ujung batang $\{F\}$. Perhatikan bahwa $\{F\}$ adalah berbeda dengan $\{F^*\}$ dari hubungan $\{F^*\} = \{F_0\} + \{F\}$. Kelima persamaan statika, dalam hubungan satu lawan satu dengan derajat-derajat kebebasan, dapat dinyatakan dengan mengamati diagram-diagram bagian-lepas dari simpul-simpul dan batang-batang dalam Gambar 7.19, jadi

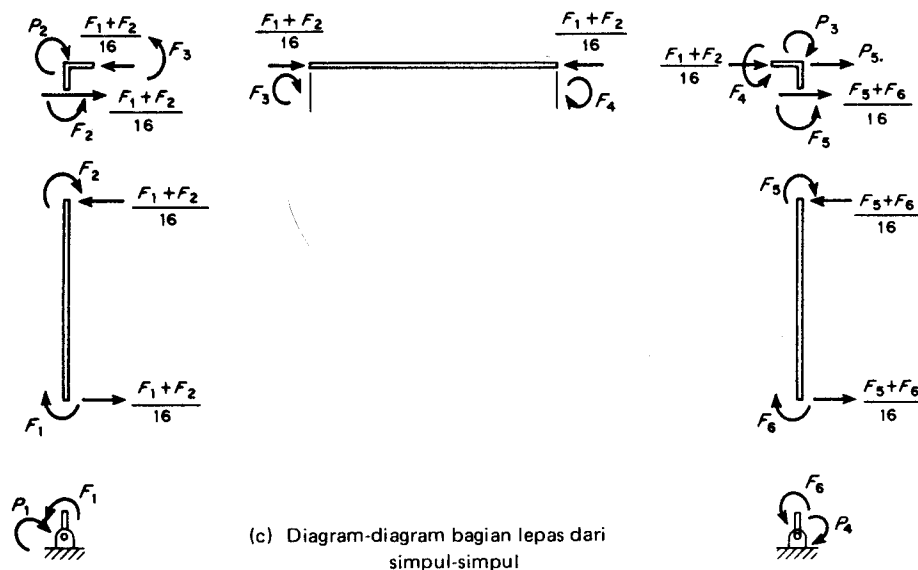
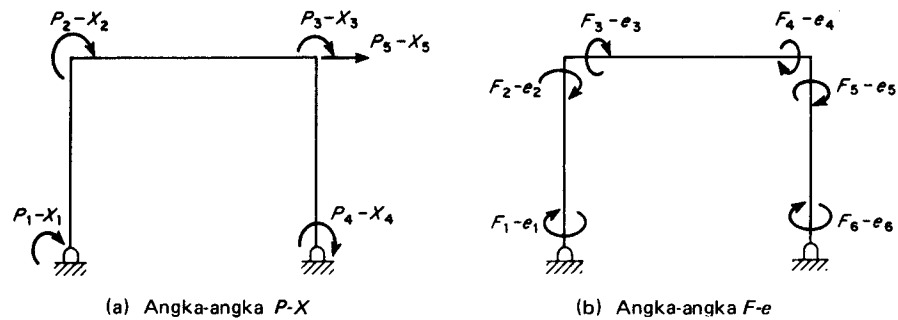
$$P_1 = F_1$$

$$P_2 = F_2 + F_3$$

$$P_3 = F_4 + F_5$$

$$P_4 = F_6$$

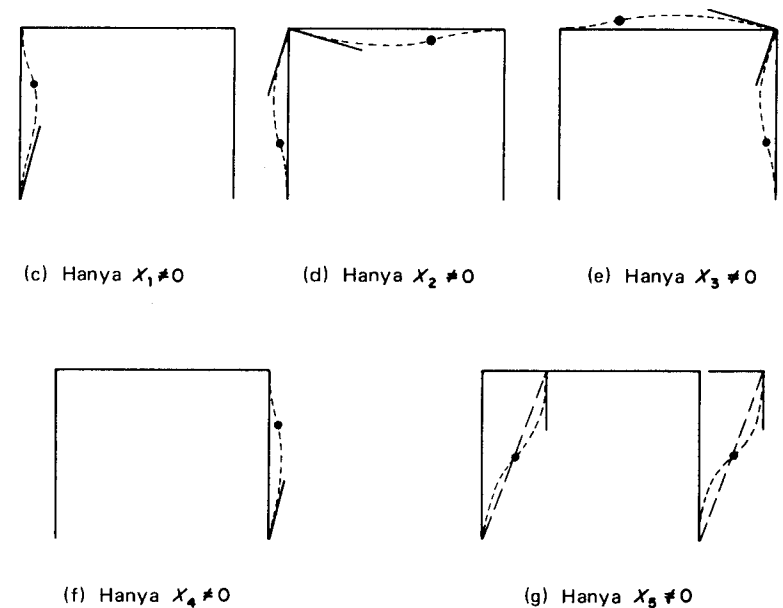
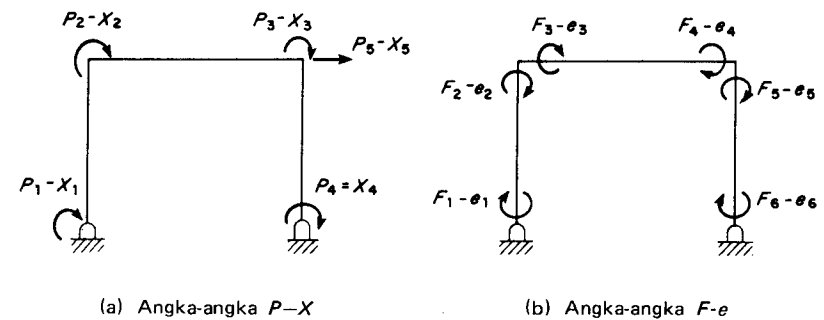
$$P_5 = -\frac{F_1 + F_2}{16} - \frac{F_5 + F_6}{16}$$

GAMBAR 7.19. Matriks $[A]$ dalam Contoh Soal 7.5.

Dalam notasi matriks, matriks statika $[A]$ adalah

$$[A]_{5 \times 6} =$$

$P \backslash F$	1	2	3	4	5	6
1	+1.0					
2		+1.0	+1.0			
3				+1.0	+1.0	
4						+1.0
5	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$			$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$

GAMBAR 7.20. Matriks $[B]$ dalam Contoh Soal 7.5.

Matriks perubahan bentuk $[B]$ mengungkapkan putaran-putaran ujung batang (sudut searah jarum jam diukur dari sumbu batang sampai ke garis-singgung kurva elastik) akibat dari tiap perpindahan simpul. Akibat-akibat ini dapat secara mudah diperoleh dengan mengamati diagram-diagram perpindahan simpul dalam Gambar 7.20; jadi

$$[B]_{7 \times 5} =$$

$\begin{smallmatrix} X \\ e \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
1	+1.0				$-\frac{1}{16}$
2		+1.0			$-\frac{1}{16}$
3		+1.0			
4			+1.0		
5			+1.0		$-\frac{1}{16}$
6				+1.0	$-\frac{1}{16}$

Matriks $[B]$ adalah sama dengan transposisi dari matriks $[A]$, pada Prinsip dari Kerja Virtual. Meskipun tidak diperlukan sebagai matriks masukan independen, ini harus ditentukan secara terpisah untuk memeriksa matriks $[A]$.

Matriks kekakuan batang $[S]$ adalah, dari Persamaan (6.8.2)

$$[S]_{6 \times 6} = EI_c *$$

$\begin{smallmatrix} F \\ e \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$				
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$				
3			1	$\frac{1}{2}$		
4			$\frac{1}{2}$	1		
5					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
6					$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Dengan menerapkan perkalian matriks,

$$[SA^T]_{6 \times 5} = EI_c *$$

$\begin{smallmatrix} X \\ F \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
1	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{3}{8}$			$-\frac{9}{128}$
2	$+\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{4}$			$-\frac{9}{128}$
3		+1	$+\frac{1}{2}$		
4		$+\frac{1}{2}$	+1		
5			$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{64}$
6			$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{64}$

$$[ASA^T]_{5 \times 5} = EI_c *$$

$\begin{smallmatrix} X \\ P \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
1	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{3}{8}$			$-\frac{9}{128}$
2	$+\frac{3}{8}$	$+\frac{7}{4}$	$+\frac{1}{2}$		$-\frac{9}{128}$
3		$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{64}$
4			$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{64}$
5	$-\frac{9}{128}$	$-\frac{9}{128}$	$-\frac{3}{64}$	$-\frac{3}{64}$	$+\frac{15}{1024}$

Dengan melanjutkan dengan prosedur yang khas dalam cara perpindahan matriks,

$$\{X\} = [ASA^T]^{-1} \{P\} = \frac{1}{EI_c} *$$

+156.16
+135.19
- 66.93
+242.95
+2234.80

dan,

$$\{F^*\} = \{F_0\} + \{F\} = \{F_0\} + [SAT]\{X\}$$

$$= \begin{bmatrix} -10.67 \\ +10.67 \\ -115.20 \\ +76.80 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +10.67 \\ +2.81 \\ +101.73 \\ +0.67 \\ -77.48 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ +13.48 \\ -13.47 \\ +77.47 \\ -77.48 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Adanya sedikit perbedaan antara pasangan nilai-nilai angka dari $F_2^*-F_3^*$ atau $F_4^*-F_5^*$ adalah akibat dari kenyataan bahwa empat atau lima angka di belakang koma dipergunakan dalam perhitungan-perhitungan dengan tangan dalam soal ini.

LATIHAN 7.6

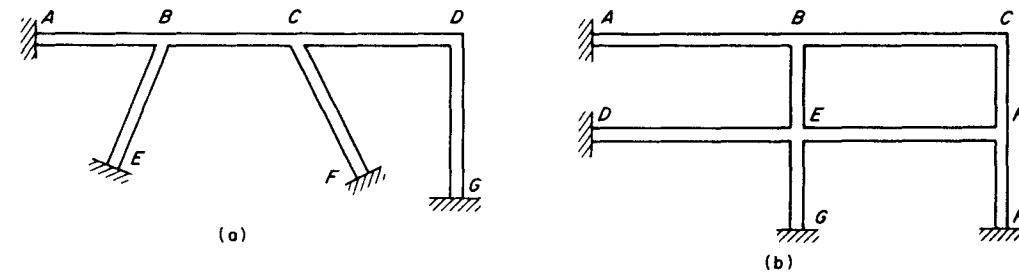
Analisislah kerangka kaku dari Latihan 7.4 (Gambar 7.14) dengan satu penyangga terjepit dan satu-sendi, pertama dengan cara lendutan-kelandaian, kemudian dengan cara perpindahan-matriks.

LATIHAN 7.7

Analisislah kerangka kaku dari Latihan 7.5 (Gambar 7.15) dengan dua penyangga-penyangga terjepit pertama dengan cara lendutan-kelandaian, kemudian dengan cara perpindahan matriks.

7.6 Cara Distribusi Momen

Cara distribusi momen, seperti telah diterapkan pada balok-balok malar boleh diterapkan secara baik pada analisis kerangka-kerangka kaku tanpa lendutan-lendutan simpul yang tidak diketahui. Andaikan kedua kerangka kaku diperlihatkan dalam Gambar 7.21 dianalisis dengan cara lendutan kelandaian atau cara distribusi momen, pergeseran-pergeseran simpul simpul yang tak diketahui hanyalah perputaran-perputaran saja. Distribusi momen memperkenalkan perputaran simpul-simpul dalam langkah-langkah bertahap guna mengimbangi momen-momen disimpul pada keadaan terjepit. Pada penyusunan tabel distribusi momen, adalah lebih mudah mencatat



Simpul	A	B				C			D		E	F	G
Batang	AB	BA	BC	BE	CB	CD	CF	DC	DG	EB	FC	GD	

(c) Judul kolom untuk distribusi momen untuk (a)

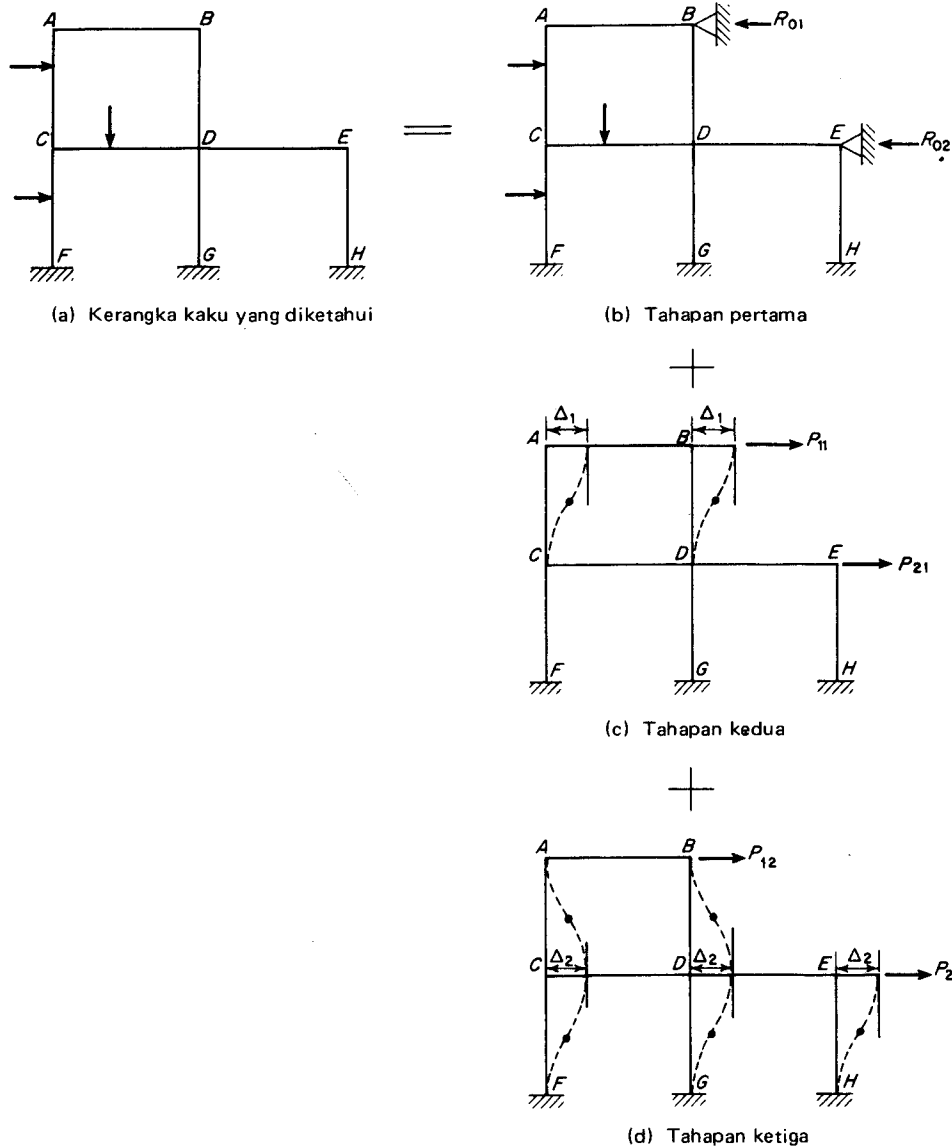
Simpul	A		B			C		D	E			F		G	H	
Batang	AB	BA	BC	BE	CB	CF	DE	EB	ED	EF	EG	FC	FE	FH	GE	HF

(d) Judul kolom untuk distribusi momen untuk (b)

GAMBAR 7.21. Distribusi Momen untuk Kerangka-kerangka Kaku tanpa Lendutan-lendutan Simpul yang tak Diketahui.

simpul-simpulnya dulu dalam urutan alfabet, kemudian batang-batang menyebar dari tiap simpul juga dalam urutan alfabet. Jadi judul-judul kolom untuk distribusi momen dari kerangka-kerangka kaku dalam Gambar 7.21a dan b akan seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 7.21c dan d. Bila sebuah simpul eksterior adalah sebuah penyangga sendi, cara faktor kekakuan dimodifikasi dan momen ujung terjepit dimodifikasi yang dibicarakan dalam Pasal 6.13 juga berlaku. Sama halnya, pemeriksaan pada distribusi momen yang dibicarakan dalam Pasal 6.12 harus dilakukan.

Bila derajat kebebasan NPS pada lendutan-lendutan simpul independen tidak sama dengan nol, distribusi momen untuk kerangka kaku dapat dilakukan dalam $(1 + NPS)$ tahapan-tahapan. Pada tahapan pertama, semua derajat-derajat kebebasan di lendutan simpul ditahan dengan memberikan penyangga-penyangga khayal seperti halnya di B dan E dalam Gambar 7.22b, distribusi momen dijalankan, dan gaya-gaya penahan R_{01} dan R_{02} dapat diperoleh. Pada tahapan kedua, dapat diperoleh sebuah himpunan momen ujung terjepit akibat dari lendutan simpul sebarang Δ_1 , jalankan distribusi momen, dan hitung gaya-gaya pembebas P_{11} dan P_{21} , seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.22c, dari momen-momen ujung terjepit yang disetimbangkan. Tahap ketiga mulai dengan sebuah himpunan dari momen-momen ujung terjepit konsisten dengan sebarang lendutan simpul Δ_1 dan



GAMBAR 7.22. Distribusi Momen dari Kerangka-kerangka Kaku dengan Lendutan-lendutan Simpul yang tidak Diketahui.

gaya-gaya pembebas P_{12} dan P_{22} , seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 7.22d, yang dihitung dari momen-momen ujung terjepit setelah distribusi momen. Tiap momen ujung terjepit yang disyaratkan dalam kerangka yang diberikan pada 7.22a adalah sama dengan jumlah dari nilainya dalam Gam-

bar 7.22b, sebuah nilai banding k_1 yang tidak diketahui kali nilainya dalam Gambar 7.22c, dan sebuah nilai banding k_2 yang tidak diketahui berapa dikali nilainya dalam Gambar 7.22d. Rasio yang tidak diketahui k_1 dan k_2 dapat ditentukan dari kondisi:

$$k_1 P_{11} + k_2 P_{12} = R_{01}$$

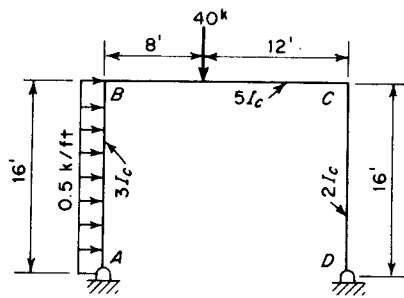
$$k_1 P_{21} + k_2 P_{22} = R_{02}$$

Jumlah aktual dari Δ_1 dan Δ_2 , bila diperlukan, dapat diperoleh dari momen-momen ujung terjepit dalam Gambar 7.22c dan d, yang adalah k_1 dan k_2 dikalikan dengan momen-momen ujung terjepit yang dipergunakan pada permulaan dari distribusi momen pada tahap kedua dan ketiga. Sama halnya, tiap perputaran simpul pada kerangka yang diketahui pada Gambar 7.22a, dapat diperoleh dari jumlah nilainya dalam Gambar 7.22d, karena nilai-nilai tersebut disuguhkan secara jelas dan dalam prosedur pemeriksaan dari tiap tabel distribusi momen. Jadi dalam proses-proses distribusi momen seperti telah diuraikan secara garis besar, tidak hanya momen-momen ujung-batang, tetapi juga perpindahan-perpindahan simpul (termasuk perputaran-perputaran dan lendutan-lendutan) dapat diperoleh. Seluruh distribusi momen, pada hakekatnya, adalah sebuah prosedur relaksasi yang terdiri dari penyelesaian persamaan-persamaan simultan pada cara lendutan-kelandaian atau perpindahan matriks.

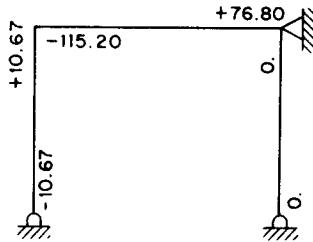
Contoh Soal 7.6. Analisislah kerangka kaku dengan penyangga-penyangga dua sendi dalam Contoh 7.3 atau 7.5 dengan cara distribusi momen. Dapatkan momen-momen ujung terjepit juga perputaran-perputaran simpul dan lendutan-lendutan dalam proses-prosesnya.

Penyelesaian. Karena derajat kebebasan pada lendutan simpul independen dari kerangka kaku yang diketahui diperlihatkan dalam Gambar 7.26b adalah satu, hanya dibutuhkan satu penyangga khayal saja dalam tahap pertama seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.23b. Distribusi momen tahap-pertama diperlihatkan dalam Tabel 7.1, di mana cara faktor kekakuan dimodifikasi dan momen ujung-terjepit dimodifikasi dipergunakan. Perhatikan bahwa ketelitian dua angka di belakang koma dipakai pada penyusunan dalam Tabel 7.1. Gaya penahan R_0 disyaratkan pada penyangga khayal dihitung seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.23c, dengan mempergunakan momen yang disetimbangkan dalam Tabel 7.1.

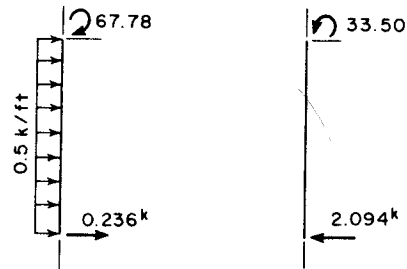
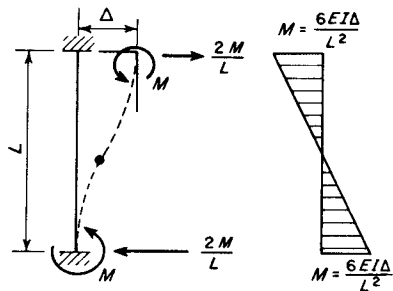
Nilai absolut dari momen-momen terjepit pada ujung-ujung dari sebuah batang yang menahan sebuah lendutan lateral Δ , seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.23d, adalah $6EI\Delta/L^2$. Jadi, momen-momen ujung terjepit



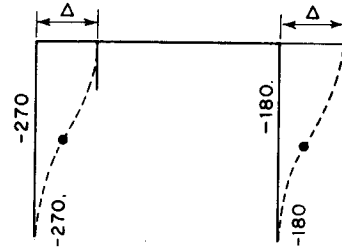
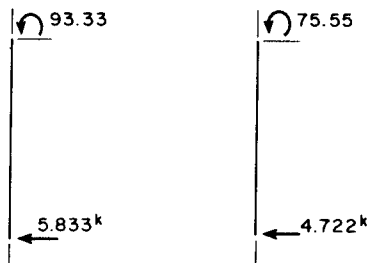
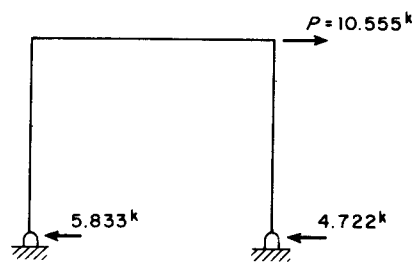
(a) Kerangka yang diketahui



(b) MUT, Tahap pertama

(c) Gaya penahan, R_0 tahap pertama

(d) MUT akibat dari perpindahan mendatar

(e) MUT konsisten akibat dari Δ (d) Gaya pembebas P , tahap kedua

GAMBAR 7.23. Cara Distribusi-Momen (Contoh Soal 7.6).

konsisten yang bekerja pada kedua kolom-kolom yang dipergunakan pada tahap kedua haruslah dalam nilai banding $6E(3I_c)\Delta/16^2$ terhadap $6E(2I_c)\Delta/16^2$, atau 3 berbanding 2. Nilai-nilai sebarang sebesar -270 dan -180 , seperti diperlihatkan dalam Gambar 7.26e, dipergunakan pada permulaan distribusi momen tahap-kedua diperlihatkan dalam Tabel 7.2. Gaya pembebas P dihitung sebagai dalam Gambar 7.23f dengan menggunakan momen-momen yang diseimbangkan dalam Tabel 7.2.

Nilai banding k yang disyaratkan dihitung dari persamaan

$$R_0 = kP$$

atau

$$k = \frac{R_0}{P} = \frac{6.142}{10.555} = 0.5819$$

Lendutan simpul yang sebenarnya Δ dapat dihitung dari rumus momen ujung terjepit yang merujuk baik ke kolom kiri maupun kanan, jadi

$$\frac{6E(3I_c)\Delta}{16^2} = 0.5819(270) \text{ atau } \frac{6E(2I_c)\Delta}{16^2} = 0.5819(180)$$

diperoleh

$$\Delta = \frac{2234.5}{EI_c} \text{ k-ft}^3$$

Momen-momen ujung-terjepit untuk kerangka yang diketahui pada Gambar 7.23a dapat diperoleh dengan menjumlahkan tahap pertama dalam Tabel 7.1 dan 0,5819 kali yang dari tahap kedua dalam Tabel 7.2. Seperti diperlihatkan dalam Tabel 7.3, momen-momen tersebut (0, +13,47, -13,47, +77,46, -77,4, 0) cocok dengan hasil-hasil dari Contoh 7.3 atau 7.5). Sama halnya, putaran-putaran simpul adalah jumlah dari yang terdapat pada akhir Tabel 7.1 dan 0,5819 dari apa yang terdapat pada akhir dari Tabel 7.2. Seperti diperlihatkan dalam Tabel 7.3, nilai-nilai tersebut (+156,1, +135,2, -66,9, +242,9) cocok dengan hasil-hasil dari Contoh 7.3 atau 7.5).

LATIHAN 7.8

Analisislah kerangka kaku dengan satu penyangga terjepit dan satu penyangga sendi dari Latihan 7.4 (Gambar 7.14) dengan cara distribusi-momen.

TABEL 7.1. Distribusi Momen, Contoh 7.6, Tahap Pertama.

Simpul	A	B		C		D
Batang	AB	BA	BC	CB	CD	DC
$\frac{EI}{L}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
$\frac{EI}{L}$ Rel	3	3	4	4	2	2
$\frac{EI}{L}$ Rel. Dimod.	—	2.25	4	4	1.5	—
FD Dimod.	—	0.3600	0.6400	0.7273	0.2727	—
MUT	-10.67	+10.67	-115.20	+76.80	—	—
MUT Dimod. PENY.	↑	+16.00 +35.71	-115.20 + 63.49	+76.80 -55.86	— -20.94	↑
CO Bal		+10.05	- 27.93 + 17.88	+31.74 -23.08	- 8.66	
PLP Peny		+ 4.15	- 11.54 + 7.39	+ 8.94 - 6.50	- 2.44	
PLP Peny		+ 1.17	- 3.25 + 2.08	+ 3.70 - 2.69	- 1.01	
PLP Peny		+ 0.48	- 1.34 + 0.86	+ 1.04 - 0.76	- 0.28	
PLP Peny		+ 0.14	- 0.38 + 0.24	+ 0.43 - 0.31	- 0.12	
PLP Peny		+ 0.06	- 0.16 + 0.10	+ 0.12 - 0.09	- 0.03	
PLP Peny		+ 0.01	- 0.04 + 0.03	+ 0.05 - 0.04	- 0.01	
PLP Peny	↓	+ 0.01	- 0.02 + 0.01	- 0.02 + 0.01	+ 0.01	↓
M Setimbang	0.00	+67.78	- 67.78	+33.50	-33.50	0.00
Perubahan	+10.67	+57.11	+ 47.42	-43.30	-33.50	0.00
$-\frac{1}{2}$ Perubahan	-28.56	- 5.33	+ 21.65	-23.71	0.00	+16.75
Jumlah	-17.89	+51.78	+ 69.07	-67.01	-33.50	+16.75
$\frac{3EI}{L}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\theta = \frac{\text{Jumlah}}{3EI/L}$	-31.81	+92.05	+ 92.09	-89.35	-89.36	+44.66

TABEL 7.2. Distribusi Momen, Contoh 7.6, Tahap Kedua

Simpul	A	B		C		D
Batang	AB	BA	BC	CB	CD	DC
$\frac{EI}{L}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
$\frac{EI}{L}$ Rel	3	3	4	4	2	2
$\frac{EI}{L}$ Rel. Dimod.	—	2.25	4	4	1.5	—
FD. Dimod	—	0.3600	0.6400	0.7273	0.2727	—
MUT	-270.00	-270.00	—	—	-180.00	-180.00
MUT Dimod PENY	↑	-135.00 + 48.60	— +86.40	— +65.45	- 90.00 + 24.55	↑
PLP Peny		- 11.78	+32.72 -20.94	+43.20 -31.42	- 11.78	
PLP Peny		+ 5.66	-15.71 +10.05	-10.47 + 7.62	+ 2.85	
PLP Peny		- 1.37	+ 3.81 - 2.44	+ 5.02 - 3.65	- 1.37	
PLP Peny		+ 0.65	- 1.82 + 1.17	- 1.22 + .89	+ 0.33	
PLP Peny		- 0.16	+ .44 - .28	+ .58 - .42	- 0.16	
PLP Peny		+ 0.08	- .21 + .13	- .14 + .10	+ 0.04	
PLP Peny		- 0.02	+ .05 - .03	+ .06 - .04	- 0.02	
PLP Peny	↓	+ 0.01	- .02 + .01	- .02 + .01	+ 0.01	↓
M Setimbang	0.00	- 93.33	+93.33	+75.55	- 75.55	0.00
Perubahan	+270.00	+176.67	+93.33	+75.55	+104.45	+180.00
$-\frac{1}{2}$ Perubahan	- 88.34	-135.00	-37.78	-46.66	- 90.00	- 52.22
Jumlah	+181.66	+ 41.67	+55.55	+28.89	+ 14.45	+127.78
$\frac{3EI}{L}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\theta = \frac{\text{Jumlah}}{3EI/L}$	+322.9	+ 74.08	+74.07	+38.52	+ 38.53	+340.7

TABEL 7.3. Momen-momen Setimbang dan Perputaran-perputaran Simpul, Contoh 7.6.

Simpul	A		B		C		D
Batang	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
M Peny. (tahap 1)	0.00	+67.78	-67.78	+33.50	-33.50	0.00	
M Peny. (tahap 2)	0.00	-54.31	+54.31	+43.96	-43.96	0.00	
M Setimb.	0.00	+13.47	-13.47	+77.46	-77.46	0.00	
θ (Tahap pertama)	-31.81	+92.05	+92.09	-89.35	-89.36	+44.66	
θ (Tahap kedua)	+187.90	+43.11	+43.10	+22.41	+22.42	+198.25	
θ	+156.11	+135.16	+135.19	-66.94	-66.94	+242.91	

LATIHAN 7.9

Analisislah kerangka kaku dengan dua penyangga terjepit dari Latihan 7.5 (Gambar 7.15) dengan cara distribusi-momen.

7.7 Catatan Penutup

Penanganan terhadap balok-balok statik tidak tertentu dalam bab yang baru lalu telah dikembangkan terhadap analisis kerangka-kerangka kaku statik tidak tertentu. Pada cara gaya, gaya-gaya kelebihan telah dipilih dari gaya-gaya eksternal. Pada hal-hal tertentu, dapat lebih baik menggunakan momen-momen ujung terjepit sebagai gaya-gaya kelebihan, tetapi pengembangan ini akan ditunda pada studi yang lebih lanjutan. Pada pendekatan cara-perpindahan, cara-cara lendutan-kelandaian dan perpindahan matriks adalah tepat sama; pada kedua cara-cara perpindahan-perpindahan simpul, termasuk perputaran-perputaran dan lendutan-lendutan, dapat diperoleh dengan menyelesaikan sebuah sistem persamaan-persamaan linear. Distribusi momen sekali lagi diperlihatkan sebagai sebuah prosedur relaksasi dari penyelesaian persamaan-persamaan linear pada cara perpindahan.

Teorema-teorema Energi

8

8.1 Energi-Kerja dibanding Cara-cara Geometrik-Fisik

Dalam analisis struktural tingkat-pertama yang hanya menyangkut beban-beban statik saja dalam rentang elastik dan linear, satu di antara dua pendekatan yang umum terhadap penyelesaian dari sebuah persoalan dapat dipilih: *cara energi-kerja* (*work-energy method*) atau *cara geometrik fisik* (*physical geometric method*). Dalam buku ini, Prinsip Kerja Virtual telah digunakan untuk menurunkan cara beban-satuan untuk mendapatkan lendutan-lendutan dari rangka, balok dan kerangka-kerangka kaku dalam Pasal 3.6, 5.7, dan 7.2. Hal ini telah juga dipergunakan untuk membuktikan hubungan transposisi antara matriks statika dan matriks perubahan bentuk dari rangka, balok dan kerangka-kerangka kaku dalam Pasal 4.5, 6.7 dan 7.5. Pada kesempatan lain, dalam Pasal 7.4, Hubungan Lendutan Timbal-balik telah dipaparkan dengan menggunakan cara beban-satuan. Selain ulasan-ulasan pendek tentang penggunaan-penggunaan dari atau rujukan-rujukan terhadap konsep-konsep energi-kerja, pendekatan fisik geometrik telah digunakan pada sebagian besar dari buku teks dasar ini sehubungan dengan pokok-pokok seperti persamaan perpindahan-simpul untuk lendutan rangka, cara luas-momen, cara-cara gaya dan perpindahan, juga seperti cara-cara lendutan-kelandaian dan distribusi momen.

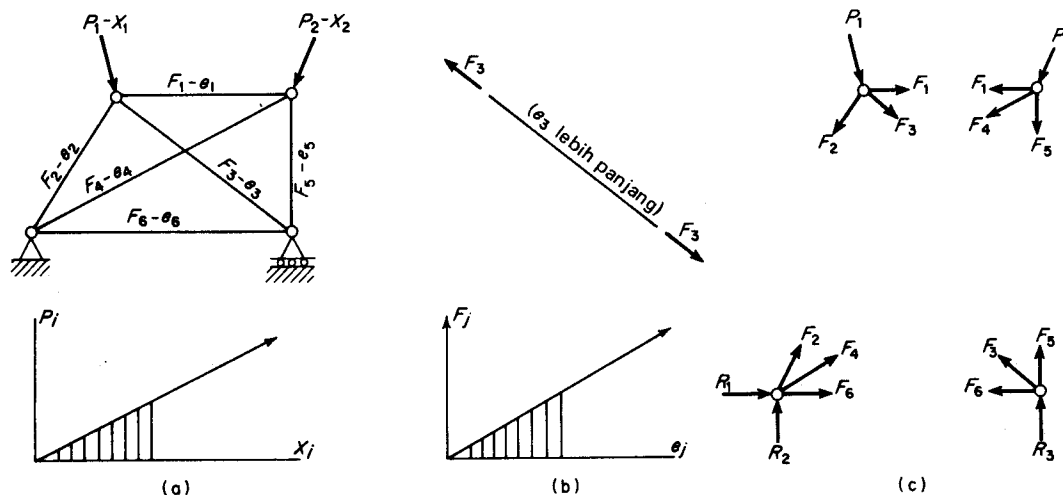
Sejauh ini hanya menyangkut struktur-struktur sederhana seperti rangka, balok, dan kerangka-kerangka kaku pendekatan geometrik fisik dapat diandalkan secara khusus untuk penyelesaian persoalan-persoalan; cara-cara

energi kerja digarap secara bersamaan guna lebih menyemarakkan dan menghaluskan prinsip-prinsip yang terlibat. Akan tetapi bila analisis-analisis struktur kemudian dikembangkan pada struktur-struktur pelat atau kulit kerang, terutama pada cara elemen terbatas yang baru dan populer, cara energi kerja menjadi satu-satunya pendekatan yang dapat diambil, karena formulasi secara pasti dan persamaan-persamaan kesetimbangan dan kesepadanan ternyata sulit bahkan dapat dikatakan tidak mungkin.

Tujuan dari bab ini adalah mengumpulkan teorema-teorema energi yang lebih penting dalam satu tempat dan pemaparan dari penerapan-penerapannya pada rangka, balok dan kerangka-kerangka kaku. Meskipun hasil-hasil yang sama dapat diperoleh dengan cara geometrik-fisik untuk struktur-struktur sederhana ini, keyakinan dan kebiasaan seseorang dengan teorema-teorema energi dapat dibina sampai suatu tingkatan tertentu *sekarang juga* sedemikian rupa sehingga penggunaan-penggunaan lebih lanjut pada masa yang akan datang untuk struktur-struktur pelat dan kulit kerang akan dapat dikuasai.

8.2 Prinsip Kerja Nyata

Prinsip Kerja Nyata (Principle of Real Work) dapat dinyatakan sebagai: "Kerja eksternal yang dilakukan pada sebuah benda elastik linear haruslah sama dengan kerja internal (kadang-kadang juga disebut sebagai energi regangan, oleh karena itu dinamakan cara energi-kerja atau teorema-teorema energi) yang tersimpan di dalam benda."



GAMBAR 8.1. Kerja Eksternal dan Kerja Internal untuk sebuah kuda-kuda.

Bila benda elastik linear merupakan kuda-kuda dua dimensi seperti di perlihatkan dalam Gambar 8.1, jumlah kerja eksternal yang dikerjakan pada benda tersebut adalah $(\frac{1}{2}P_1X_1 + \frac{1}{2}P_2X_2)$ dan jumlah kerja internal yang disimpan di dalamnya adalah $(\frac{1}{2}F_1e_1 + \frac{1}{2}F_2e_2 + \dots + \frac{1}{2}F_6e_6)$; atau secara umum

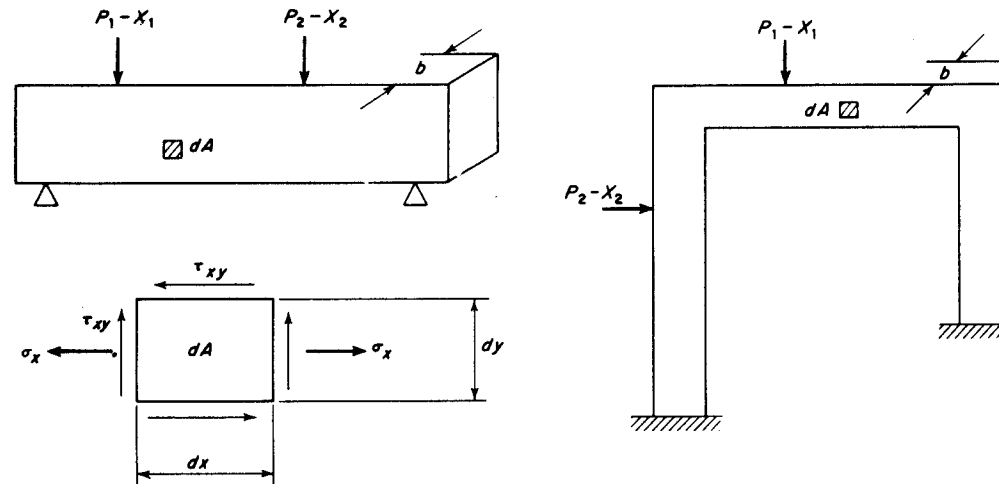
$$(8.2.1) \quad \sum (\frac{1}{2}P_iX_i) = \sum_{j=1}^{j=NF} (\frac{1}{2}F_je_j)$$

Bila benda elastik linear adalah sebuah balok atau sebuah kerangka kaku seperti diperlihatkan dalam Gambar 8.2, jumlah kerja eksternal yang dikerjakan pada benda tersebut adalah $(\frac{1}{2}P_1X_1 + \frac{1}{2}P_2X_2)$ dan jumlah kerja internal yang disimpan di dalam benda tersebut adalah $\sum (\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy})$ yang diintegral b kali seluruh luas dua dimensi $dA = dydx$; atau secara umum

$$(8.2.2) \quad \sum (\frac{1}{2}P_iX_i) = \int (\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}) b dA$$

Peran serta terhadap kerja internal oleh tegangan-tegangan geser τ_{xy} dan regangan-regangan γ_{xy} dan dengan tegangan-tegangan normal σ_x serta regangan-regangan ϵ_x akibat gaya aksial pada batang, adalah kecil dan oleh karena itu tidak ditinjau dalam buku teks elementer ini. Jadi bagian kanan dari Persamaan (8.2.2) menjadi

$$(8.2.3) \quad \sum (\frac{1}{2}P_iX_i) = \int \int \frac{1}{2} \left(\frac{My}{I} \right) \left(\frac{My}{EI} \right) b dy dx = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$



GAMBAR 8.2. Kerja Eksternal dan Kerja Internal untuk sebuah Balok atau sebuah Kerangka Kaku.

Tak banyak yang dapat diperbuat untuk menghasilkan sebuah bukti aljabar umum untuk Prinsip Kerja Nyata, selain menyatakan bahwa bila tegangan internal dan regangan (misalnya $F-e$ dalam Gambar 8.1 dan $\sigma_x-\epsilon_x-\tau_{xy}-\gamma_{xy}$ dalam Gambar 8.2) dalam kenyataannya adalah tanggapan yang "benar" atau "dianggap" akibat sebuah himpunan penerapan $P-X$, kerja eksternal haruslah sama dengan kerja internal menurut Hukum Konservasi Kerja dan Energi. Tetapi dalam kejadian-kejadian rangka selama anggapan tingkat pertama bahwa perpindahan-perpindahan ujung melintang tidak merubah panjang batang dipegang tegah. Kebenaran dari Persamaan (8.2.1) dapat dipahami dengan melihat bahwa jumlah kerja yang dilakukan oleh gaya resultante nol yang bekerja pada masing-masing dari keempat simpul yang diperlihatkan dalam Gambar 8.1c adalah nol; jadi, dengan mencatat bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya F yang bekerja pada simpul adalah selalu negatif.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2}P_1X_1 - \frac{1}{2}(F_1)(\text{bagian dari } e_1) - \frac{1}{2}(F_2)(\text{bagian dari } e_2) - \frac{1}{2}(F_3)(\text{bagian dari } e_3) \right] + \left[\frac{1}{2}P_2X_2 - \frac{1}{2}(F_1)(\text{bagian lain dari } e_1) - \frac{1}{2}(F_4)(\text{bagian dari } e_4) - \frac{1}{2}(F_5)(\text{bagian dari } e_5) \right] \\ & + \left[-\frac{1}{2}(F_2)(\text{bagian lain dari } e_2) - \frac{1}{2}(F_4)(\text{bagian lain dari } e_4) - \frac{1}{2}(F_6)(\text{bagian dari } e_6) \right] + \left[-\frac{1}{2}(F_3)(\text{bagian lain dari } e_3) - \frac{1}{2}(F_5)(\text{bagian lain dari } e_5) - \frac{1}{2}(F_6)(\text{bagian lain dari } e_6) \right] = 0 \end{aligned}$$

dari mana

$$\frac{1}{2}P_1X_1 + \frac{1}{2}P_2X_2 = \frac{1}{2}F_1e_1 + \frac{1}{2}F_2e_2 \cdots + \frac{1}{2}F_6e_6$$

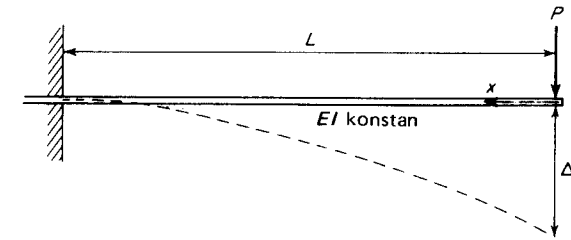
Konsep ini dapat dikembangkan ke Gambar 8.2 tetapi kita harus condong untuk melayangkan khayal kita untuk menghadapi batang malar dua dimensi, daripada sejumlah tertentu simpul-simpul dan batang-batang yang dibebani secara aksial.

Bila hanya ada sebuah beban sebenarnya yang bekerja pada sebuah struktur, komponen dari lendutan di titik penerapan dan arah dari beban dapat ditentukan dengan Prinsip Kerja Nyata.

Contoh Soal 8.1. Tentukan dengan Prinsip Kerja Nyata, lendutan pada ujung bebas dari sebuah balok konsol prismatik yang menahan beban terpusat pada ujungnya.

Penyelesaian. Dengan menggunakan Persamaan (8.2.3) dan merujuk pada Gambar 8.3.

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$



GAMBAR 8.3. Lendutan dari sebuah Balok Konsol.

diperoleh

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

Contoh Soal 8.2. Dari penyelesaian kuda-kuda statik tidak tertentu dalam Contoh 4.2, seperti diperlihatkan sepenuhnya dalam Gambar 4.6, hitung dan bandingkan angka-angka kerja eksternal dan kerja internal.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{Kerja Eksternal} &= \left[\frac{1}{2}(9)(41.08) + \frac{1}{2}(18)(109.03) \right] \times 10^{-3} \\ &= 1166.13 \times 10^{-3} \text{ in.-kips} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kerja Internal} &= \frac{1}{2}[7.73(7.73) + 11.88(11.88)(2) + 1.27(1.27) + 18(72) \\ &\quad + 1.69(6.76) + 2.11(4.22) + 4.81(9.62) \\ &\quad + 17.69(35.38)] \times 10^{-3} \\ &= 1166.05 \times 10^{-3} \text{ in.-kips (periksa)} \end{aligned}$$

LATIHAN 8.1

Tentukan, dengan Prinsip Kerja Nyata, lendutan di bawah sebuah beban terpusat yang bekerja di tengah-tengah sebuah balok sederhana prismatik.

LATIHAN 8.2

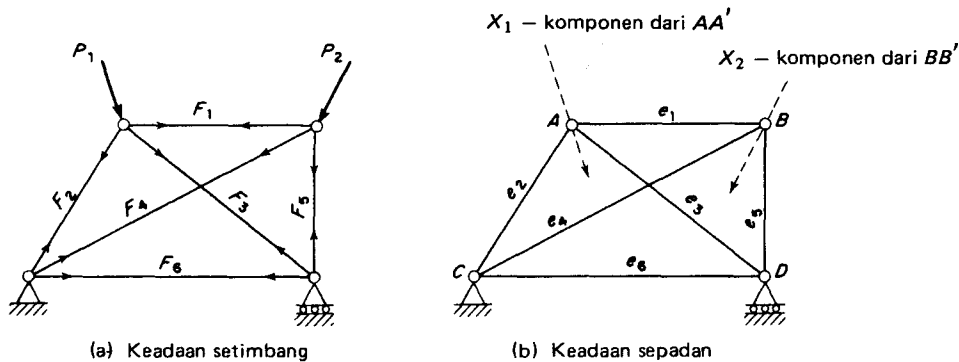
Dari penyelesaian dari kuda-kuda statik tertentu dalam Latihan 4.1, hitung dan bandingkanlah secara numeris kerja eksternal dan kerja internal.

8.3 Prinsip Kerja Virtual

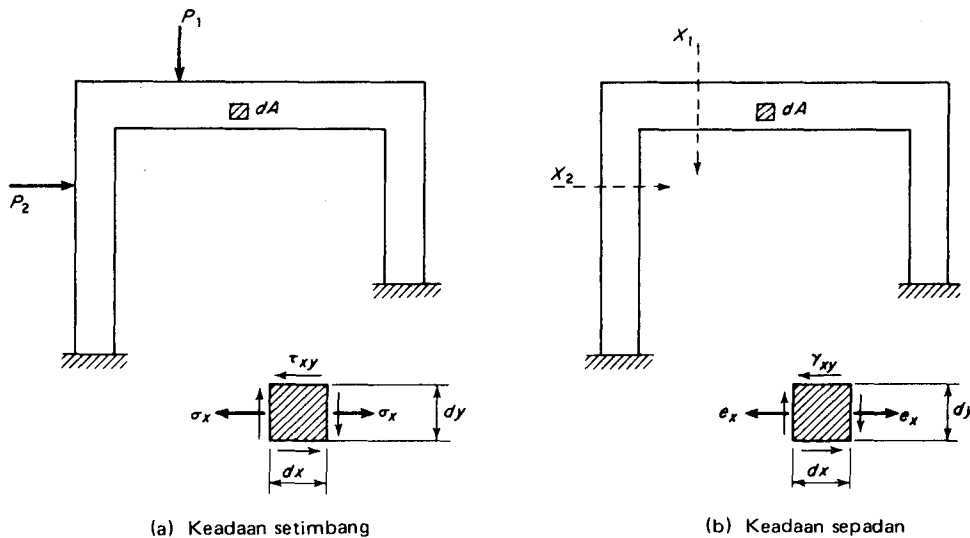
Prinsip Kerja Virtual telah disebut dalam Pasal 3.6, 5.7 dan 7.2 sebagai: Kerja eksternal dan internal, yang masing-masing dikerjakan oleh gaya-gaya

dalam "keadaan setimbang" lewat perubahan bentuk dari sebuah "keadaan sepadan," haruslah sama.

Sebuah keadaan setimbang berarti bahwa ada kesetimbangan sempurna dari struktur secara keseluruhan atau sebagian. Misalnya, dalam keadaan setimbang dari Gambar 8.4a, didefinisikan bahwa dua P dan enam F adalah dalam keadaan setimbang; bagaimana F dapat ditentukan adalah di luar persoalan. Sama halnya dalam Gambar 8.5a tegangan normal σ_x dan tegangan geser τ_{xy} pada semua titik telah didefinisikan dan di manapun selalu ada kesetimbangan terus-menerus; sekali lagi bagaimana nilai-nilai σ_x dan τ_{xy} dapat diperoleh adalah di luar persoalan.



GAMBAR 8.4. Keadaan-keadaan Setimbang dan Sepadan dari sebuah Rangka.



GAMBAR 8.5. Keadaan-keadaan Setimbang dan Sepadan dari sebuah Kerangka Kaku.

Sebuah keadaan sepadan berarti bahwa di mana-mana di dalam struktur terdapat perubahan bentuk yang sepadan sempurna. Misalnya, dalam keadaan sepadan dari Gambar 8.4b, kedudukan terpindahkan $A'-B'-D'$ dari kedudukan-kedudukan asli $A-B-D$ telah didefinisikan yang menghasilkan komponen-komponen perpindahan X_1 dan X_2 dalam arah-arah dari P_1 dan P_2 , dan pertambahan-pertambahan panjang e_1 sampai e_6 dalam batang-batang. Sama halnya dalam Gambar 8.5b, bentuk yang telah mengalami perubahan bentuk dari struktur telah didefinisikan, yang menghasilkan komponen-komponen perpindahan-perubahan X_1 dan X_2 , dan regangan-regangan normal dan geser ϵ_x dan γ_{xy} .

Hasil kali dari salah satu gaya eksternal dalam keadaan setimbang dan komponen perpindahan yang sesuai dalam keadaan sepadan memiliki persamaan dengan definisi tentang kerja tetapi di sini bukan kerja sebenarnya yang dilaksanakan, jadi dinamakan *kerja virtual*. Jumlah dari semua hasil kali termasuk semua gaya dalam keadaan setimbang didefinisikan sebagai *kerja virtual eksternal jumlah*, atau mudahnya dirujuk sebagai *kerja eksternal*. Sama halnya, jumlah keseluruhan, baik hasil-hasil kali dari jumlah tertentu dari gaya-gaya internal dalam keadaan setimbang dan perubahan-perubahan bentuk yang sesuai dalam keadaan sepadan (seperti dalam Gambar 8.4) ataupun integrasi dari hasil kali malar fungsi-fungsi dari tegangan internal dan regangan-regangan (seperti dalam Gambar 8.5), adalah didefinisikan sebagai *kerja virtual internal jumlah*, atau secara lebih sederhana dinamakan *kerja internal*.

Bahwa Prinsip Kerja Virtual adalah benar dapat dituangkan dengan alasan penalaran sebagai berikut: Misalkan gaya-gaya eksternal P_1 dan P_2 pertama-tama diterapkan terhadap struktur, misalnya, seperti dalam Gambar-gambar 8.4a atau 8.4b. Kemudian misalkan keadaan sepadan dari Gambar 8.4b atau 8.5b disupersisikan pada struktur yang telah berubah bentuk dari Gambar-gambar 8.4a atau 8.5a. Selama sifat bahan adalah linear elastik dan analisis derajat pertama diasumsikan (para pembaca disarankan untuk meninjau kembali Pasal-pasal 1.2 dan 1.3), gaya-gaya dan perubahan-perubahan bentuk dari struktur hasil haruslah sama dengan jumlah dari keadaan-keadaan terpisah. Karena kerja nyata eksternal dan kerja nyata internal haruslah sama tidak saja dalam tiap-tiap dari kedua keadaan terpisah tetapi juga dalam keadaan tergabung, kerja eksternal dan kerja internal yang dilaksanakan oleh gaya-gaya dalam keadaan setimbang selama "mengadakan" perubahan-perubahan dalam keadaan sepadan selama superposisi haruslah sama; jadi Prinsip dari Kerja Virtual.

Bila hanya ada sebuah gaya eksternal saja dalam keadaan setimbang, komponen perpindahan dalam arah gaya tersebut dalam keadaan sepadan dapat diperoleh dengan menerapkan Prinsip Kerja Nyata, dari sini, cara

beban-satuan untuk rangka (Pasal 3.6), balok-balok (Pasal 5.7), dan kerangka-kerangka kaku (Pasal 7.2).

8.4 Hubungan Transposisi antara Matriks Statika dan Matriks Perubahan Bentuk

Dari Pasal-pasal 4.5, 6.7 dan 7.5, matriks statika dan matriks perubahan bentuk dari rangka, balok-balok dan kerangka-kerangka kaku telah didefinisikan dan hubungan transposisi antara keduanya telah dipaparkan. Sebuah bukti terpadu untuk hubungan ini dapat dilakukan dengan menerapkan Prinsip Kerja Virtual terhadap sebuah keadaan setimbang yang diutamakan oleh kolom ke j dari matriks statika $[A]$ dan sebuah keadaan sepadan diutamakan oleh kolom ke i dari matriks perubahan bentuk $[B]$ sebagai berikut:

$$[A]_{NP \times NF} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} F \\ \hline P \end{array} & \begin{array}{c} j \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ NP \end{array} & \begin{array}{c} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{ij} \\ \vdots \\ A_{NPj} \end{array} \end{array}$$

$$[B]_{NF \times NP} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} X \\ \hline e \end{array} & \begin{array}{c} i \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ NP \end{array} & \begin{array}{c} B_{1i} \\ B_{2i} \\ \vdots \\ B_{ji} \\ \vdots \\ B_{NPi} \end{array} \end{array}$$

Karena X_i adalah satu-satunya perpindahan eksternal yang tidak sama dengan nol dalam keadaan sepadan, jumlah kerja virtual eksternal adalah $(A_{ij}F_j)(X_i)$. Karena F_j adalah satu-satunya gaya internal dalam keadaan setimbang, jumlah kerja virtual internal adalah $(F_j)(B_{ji}X_i)$. Dengan memper-samakan kerja eksternal dan internal,

$$(A_{ij}F_j)(X_i) = (F_j)(B_{ji}X_i)$$

dari mana

$$A_{ij} = B_{ji}$$

Jadi,

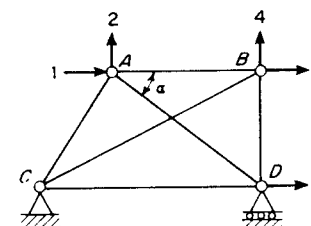
$$[A] = [B^T]$$

Dengan merujuk ke rangka dari Gambar 8.6, persamaan antara kerja virtual eksternal dan kerja virtual internal dapat diungkapkan dengan

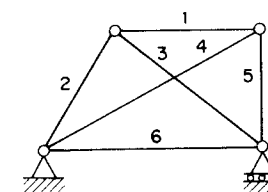
$$(A_{13}F_3)(X_1) = (F_3)(B_{31}X_1)$$

dari mana

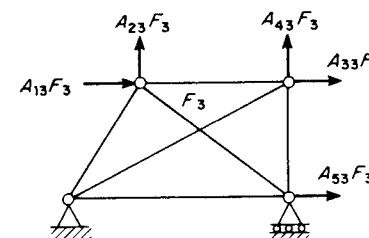
$$A_{13} = B_{31}$$



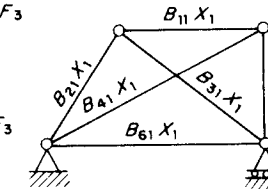
(a) Angka-angka $P-X$, $NP = 5$



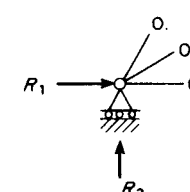
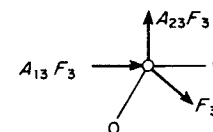
(b) Angka-angka $F-e$, $NF = 6$



(c) Keadaan setimbang, hanya $F_3 \neq 0$



(d) Keadaan sepadan, hanya $X_1 \neq 0$



(e) Keadaan setimbang: dengan bagian lepas

GAMBAR 8.6. Prinsip Kerja Virtual yang Diterapkan pada sebuah Kuda-kuda.

A_{13} dan B_{13} keduanya secara terpisah diamati sebagai $(-\cos \alpha)$. Bukti yang khas dapat dibuat dalam persoalan ini dengan memantapkan bahwa kerja yang dilakukan gaya resultante nol yang bekerja pada simpul A (Gambar 8.6e) sepanjang perpindahan X_1 haruslah sama dengan nol.

Dengan merujuk kepada kerangka kaku dari Gambar 8.7 persamaan antara kerja virtual eksternal dan kerja virtual internal dapat diungkapkan

sebagai

$$(A_{35}F_5)(X_3) = (F_5)(B_{53}X_3)$$

Setiap A_{35} dan B_{53} dapat ditentukan secara mandiri menjadi $(-1/L_{56})$. Di sini A_{35} diperoleh dengan menerapkan $\Sigma F_x = 0$ terhadap simpul B , tetapi B_{53} adalah perputaran yang berlawanan arah jarum jam dari sumbu-sumbu batang, karena nilainya pun adalah $(-1/L_{56})$ karena sumbu-sumbu batang berputardalam arah sesuai arah jarum jam akibat dari X_3 , yang mengikuti persamaan

$$e_5 = X_2 - \frac{X_3}{L_{56}}$$

Sebuah bukti yang khusus untuk persamaan kerja virtual dalam keadaan ini dapat dijalankan dengan mengamati bahwa kerja yang dilaksanakan oleh gaya resultante nol yang bekerja pada batang CD (Gambar 8.7e) yang menjalani perputaran benda kaku haruslah sama dengan nol.

8.5 Teorema Energi Kebalikan

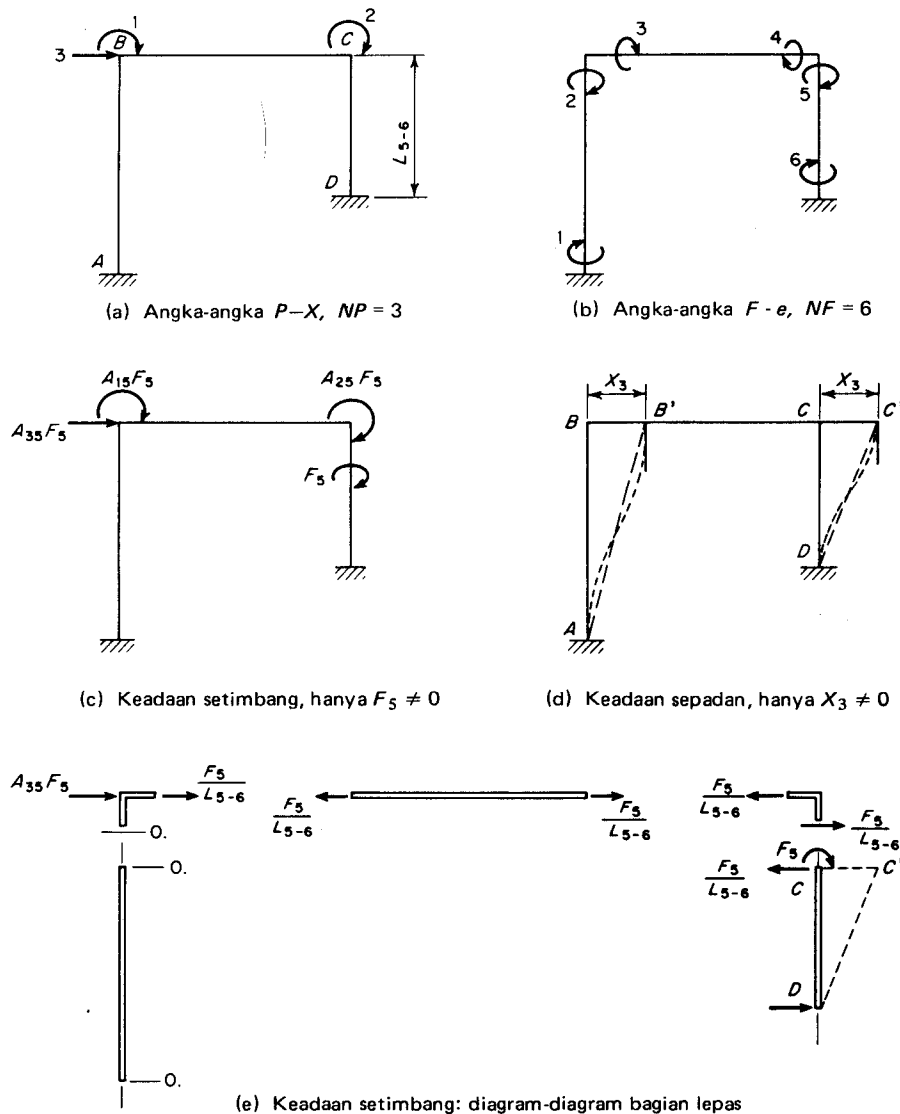
Teorema Energi Kebalikan dapat dinyatakan sebagai: "Kerja eksternal atau internal, yang dikerjakan oleh gaya-gaya eksternal atau resultante-resultante tegangan internal dalam sebuah sistem- P , yang menjalani perpindahan-perpindahan atau perubahan-perubahan bentuk yang sesuai dalam sebuah sistem- Q , haruslah sama dengan kerja eksternal atau internal yang dikerjakan oleh gaya-gaya eksternal atau resultante-resultante tegangan internal dalam sistem- Q , yang menjalani perpindahan-perpindahan atau perubahan-perubahan bentuk yang sesuai dalam sistem- P ." Agar supaya teorema ini dapat dipertahankan kebenarannya, analisis cara derajat pertama harus diasumsikan dan sifat bahan haruslah elastik lienar (lihat Pasal-pasal 1.2 dan 1.3).

Untuk membuktikan teorema di atas, maka kita bayangkan bahwa sistem- P diterapkan pertama pada benda elastik linear yang menyebabkan perubahan-perubahan bentuk (ΔP) , dan hasil kerja eksternal atau internal dapat dinyatakan secara simbolis sebagai $\frac{1}{2}P(\Delta P)$. Kemudian sistem- Q ditambahkan, yang menyebabkan perubahan-perubahan bentuk tambahan (ΔQ) ; dan kerja eksternal atau internal menjadi

$$(8.5.1) \quad W = \frac{1}{2}P(\Delta P) + \frac{1}{2}Q(\Delta Q) + P(\Delta Q)$$

karena gaya-gaya- P "membonceng gratis" selama perubahan-perubahan bentuk (ΔQ) . Akan tetapi bila sistem- Q telah diterapkan pertama-tama dan kemudian ditambah oleh sistem- P hasil kerja eksternal atau internal adalah

$$(8.5.2) \quad W = \frac{1}{2}Q(\Delta Q) + \frac{1}{2}P(\Delta P) + Q(\Delta P)$$



GAMBAR 8.7. Prinsip Kerja Virtual yang diterapkan pada sebuah Kerangka kaku.

Karena jumlah kerja internal dalam benda elastik linear di bawah kedua sistem- P dan Q haruslah sama tanpa memandang urutan penerapannya, maka penyamaan Persamaan (8.5.1) dengan Persamaan (8.5.2) memberikan

$$(8.5.3) \quad P(\Delta Q) = Q(\Delta P)$$

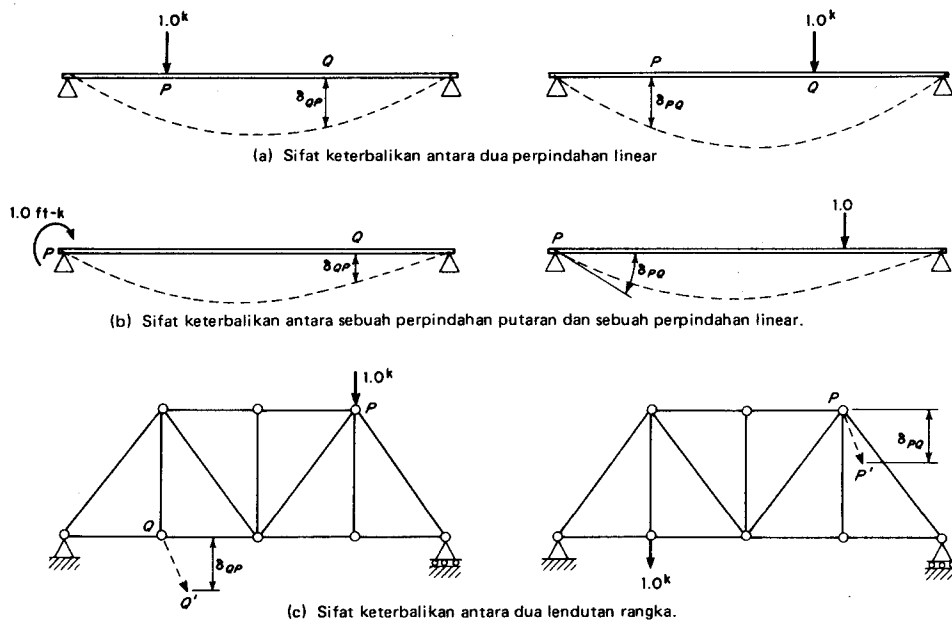
Persamaan (8.5.3) adalah Teorema Energi Kebalikan.

Bila hanya ada sebuah beban satuan tunggal pada setiap sistem- P dan Q dan notasi δ_{PQ} dipergunakan untuk menyatakan lendutan di P akibat dari sebuah beban satuan di Q , maka dengan menerapkan Teorema Energi Kebalikan pada tiap-tiap kejadian dari Gambar 8.8, dapat kita peroleh

$$(1.0)(\delta_{QP}) = (1.0)(\delta_{PQ})$$

atau,

$$(8.5.4) \quad \delta_{QP} = \delta_{PQ}$$



GAMBAR 8.8. Hukum Lendutan-lendutan Kebalikan.

Persamaan (8.5.4) adalah Hukum Lendutan-lendutan Kebalikan yang menyatakan bahwa lendutan di Q akibat sebuah beban satuan di P adalah sama dengan lendutan di P akibat sebuah beban satuan di Q . Pembaca dirujuk ke Pasal 7.4 dimana Hukum Lendutan-lendutan Kebalikan dipaparkan dalam cara beban-satuan dalam mendapatkan lendutan-lendutan, jadi dengan menunjuk pada Gambar 8.8a dan b,

$$\delta_{PQ} = \int \frac{(m_Q)(m_P) dx}{EI}$$

$$\delta_{QP} = \int \frac{(m_P)(m_Q) dx}{EI}$$

dan,

$$\delta_{QP} = \delta_{PQ}$$

Dalam kejadian dengan rangka seperti diperlihatkan dalam Gambar 8.8c, dengan cara beban-satuan,

$$\delta_{PQ} = \sum F_P e_Q = \sum \frac{F_P F_Q L}{AE}$$

$$\delta_{QP} = \sum F_Q e_P = \sum \frac{F_Q F_P L}{AE}$$

dan,

$$\delta_{QP} = \delta_{PQ}$$

Menurut sejarahnya, Hukum Lendutan-lendutan Kebalikan diciptakan atas nama Maxwell* pada tahun 1864 dalam usahanya untuk menentukan lendutan rangka dengan cara beban-satuan, tetapi Teorema Energi Kebalikan secara lebih umum adalah hasil kerja dari Betti** pada tahun 1872.

Contoh Soal 8.3. Tunjukkan bahwa Teorema Energi Kebalikan berlaku bagi sistem-sistem gaya dari Gambar 4.6c dan Gambar 4.6h serta j.

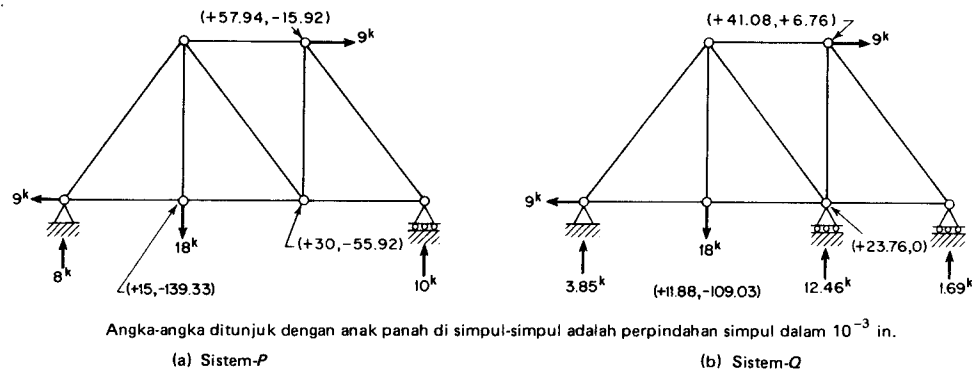
Penyelesaian. Sistem-sistem gaya dari Gambar 6.6e dan Gambar 4.6h serta j diperlihatkan lagi dalam Gambar 8.9a dan b dan disebut sistem-sistem P dan Q .

$$P * \Delta Q = [(9)(41.08) + (18)(109.03)] \times 10^{-3} = 2.332 \text{ in.-kips}$$

$$Q * \Delta P = [(9)(57.94) + (18)(139.33) - (12.46)(55.92)] = 2.322 \text{ in.-kips}$$

* *History of Strength of Materials*, oleh S. P. Timoshenko, McGraw-Hill Book Company, 1953, hal 207.

** Dari sumber yang sama, hal. 320.



GAMBAR 8.9. Teorema Energi Kebalikan Diterapkan pada sebuah Rangka.

8.6 Hukum Gaya Kebalikan dibanding Hukum Lendutan Kebalikan

Dalam Pasal 4.5 telah dibuktikan dengan bantuan aljabar matriks bahwa gaya eksternal dibanding matriks perpindahan simpul $[K] = [ASA^T]$ adalah sebuah matriks simetri. Bahwa K_{ij} dan K_{ji} adalah sama dapat dibuktikan dengan menerapkan Teorema Energi Kebalikan terhadap sebuah sistem P di mana hanya $X_j \neq 0$ dan sebuah sistem- Q di mana hanya $X_i \neq 0$ seperti diperlihatkan di bawah:

$[K] = [ASA^T] =$

$P \backslash X$	i	j
1		
i	K_{ii}	K_{ij}
j	K_{ji}	K_{jj}
NP		

Sistem-Q Sistem-P

Jadi,

$$P * \Delta Q = Q * \Delta P$$

$$K_{ij} X_j * X_i = K_{ji} X_j * X_i$$

dan,

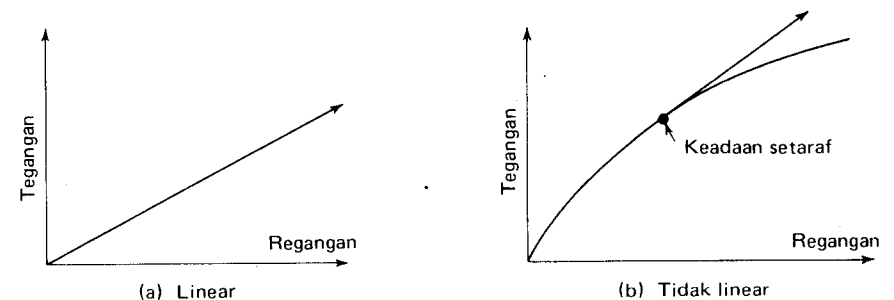
$$(8.6.1) \quad K_{ij} = K_{ji}$$

Persamaan (8.6.1) dapat disebut Hukum Gaya Kebalikan yang menyatakan bahwa gaya pada derajat kebebasan ke- i akibat dari sebuah perpindahan ke- j satuan adalah sama dengan gaya pada derajat kebebasan ke- j akibat dari sebuah perpindahan ke- i satuan. Karena kenyataannya matriks $[K]$ mengungkapkan gaya-gaya eksternal dalam elemen-elemen perpindahan-perpindahan, maka disebut *matriks kekakuan struktur* (*structure stiffness matrix*).

Karena inversi dari sebuah matriks simetrik adalah juga simetrik, matriks $[\delta] = [K^{-1}]$ adalah simetrik. Bahwa δ_{ij} dan δ_{ji} adalah sama adalah ditunjukkan oleh Hukum Lendutan Kebalikan (atau Perpindahan-perpindahan). Karena kenyataannya matriks $[\delta] = [K^{-1}]$ mengungkapkan perpindahan-perpindahan dalam bentuk gaya-gaya, maka disebut *matriks kelenyutan struktur* (*structure flexibility matrix*).

8.7 Perluasan dari Sifat Bahan Nonlinear

Meski sifat bahan adalah nonlinear, argumentasi-argumentasi yang disuguhkan pada bab-bab yang terdahulu akan tetap juga dapat diterapkan jika dapat kita bayangkan, pertama-tama, keadaan setaraf (di mana nilai-nilai $P-X$ eksternal dan $F-e$ internal diketahui) yang dinyatakan dalam titik besar pada kurva tegangan-regangan pada Gambar 8.10b. Keadaan yang terjadi sekejap ini dapat dipandang linear asalkan hanya pertambahan-pertambahan yang sangat kecil yang sepadan dari perpindahan-perpindahan eksternal ΔX dan perubahan-perubahan bentuk internal Δe ditambahkan pada keadaan setaraf.



GAMBAR 8.10. Sifat Bahan Linear dan Nonlinear.

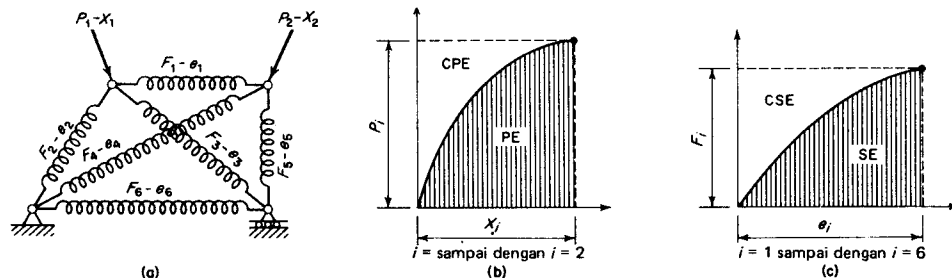
Prinsip Kerja Virtual akan menjadi: "Bertambahnya kerja eksternal dan kerja internal, yang masing-masing dikerjakan oleh gaya-gaya dalam 'keadaan kesetimbangan setaraf' dalam melewati perubahan-perubahan bentuk yang sangat kecil dari sebuah 'keadaan sepadan setelah pertambahan' haruslah sama," atau dalam bentuk simbolik

$$(8.7.1) \quad \Sigma P(\Delta x) = \Sigma F(\Delta e)$$

Juga akan terdapat *matriks kekakuan struktur langsung* $[K']$ pada keadaan setaraf, yang akan mengungkapkan pertambahan gaya-gaya kecil ΔP dalam elemen-elemen perpindahan-perpindahan yang sangat kecil ΔX . Sama halnya *matriks kelenturan struktur-langsung* $[\delta']$ akan mengungkapkan perpindahan-perpindahan kecil ΔX dalam elemen pertambahan gaya-gaya kecil ΔP .

8.8 Energi Potensial dan Energi Potensial Pelengkap dibanding dengan Energi Regangan dan Energi Regangan Pelengkap

Telah dinyatakan dalam Pasal 1.4 bahwa setiap struktur dapat dianggap sebagai rakitan dari pegas-pegas (seperti halnya pada sebuah rangka atau suatu pemampatan dari sejumlah tak berhingga pegas-pegas kecil (seperti halnya pada sebuah balok). Untuk rangka dari Gambar 8.11a, yang terdiri dari enam pegas-pegas *nonlinear* dan menahan dua gaya eksternal, definisi dari keadaan setaraf di mana himpunan nilai-nilai $P-X$ dan $F-e$ telah dicapai lewat jalur-jalur yang khas dapat digambarkan dengan Gambar 8.11b dan c. Jumlah kerja eksternal yang dilakukan terhadap kuda-kuda adalah jumlah dua luas di bawah dua kurva $P-X$ dari Gambar 8.11b, dan jumlah kerja internal adalah jumlah dari enam luas di bawah enam kurva $F-e$ pada Gambar 8.11c. Dengan menerapkan Prinsip Kerja Nyata terhadap rangka non-linear ini,



GAMBAR 8.11. Sebuah Kesetimbangan setaraf.

$$(8.8.1) \quad \Sigma(2 \text{ luas di bawah } 2 P-X) = \Sigma(6 \text{ luas di bawah } 6 \text{ kurva } F-e)$$

Kerja eksternal yang dilakukan terhadap sebuah benda juga disebut sebagai *energi potensial* (PE); dan kerja internal yang disimpan di dalam benda disebut sebagai *energi regangan* (SE). Keduanya adalah sama; masing-masing daripadanya memiliki arti fisik, dan keduanya diperlihatkan pada luas-luas yang diarsir tegak dalam Gambar 8.11b dan c.

Luas-luas sebelah kiri dari kurva-kurva $P-X$ atau $F-e$ dalam Gambar 8.11b dan c, masing-masing daripadanya dibatasi oleh sumbu vertikal dan garis horisontal lewat titik besar, tidak memiliki arti fisik, tetapi merupakan bagian-bagian pelengkap dari segi-segi empat tersebut dan memiliki satuan-satuan dimensi seperti kerja dan energi. Istilah *energi potensial-pelengkap* (*complementary-potential energy*) (CPE) dipergunakan untuk menyatakan jumlah dari luas-luas sebelah kiri dari kurva-kurva $P-X$, istilah energi regangan-pelengkap (*complementary-strain energy*) (CSE), adalah jumlah dari luas-luas sebelah kiri kurva-kurva $F-e$. Perlu dicatat bahwa jumlah energi potensial-pelengkap tidaklah perlu sama dengan jumlah energi regangan-pelengkap. Kegunaan dari konsep energi pelengkap akan diterangkan dalam Pasal 8.10.

8.9 Teorema Castigliano Pertama

Castigliano* pada tahun 1879 menerbitkan dua teorema yang berhubungan dengan struktur-struktur linear; kemudian Engesser** pada tahun 1889 menjadikan teorema-teorema ini lebih umum dan membuatnya lebih dapat diterapkan baik untuk kejadian-kejadian linear maupun nonlinear.

Teorema Castigliano Pertama dapat dinyatakan sebagai: "Turunan parsial dari energi potensial, atau energi regangan, sehubungan dengan sebuah perpindahan pada sebarang titik pada sebuah struktur, adalah sama dengan gaya dalam arah perpindahan," atau, dalam bentuk simbol

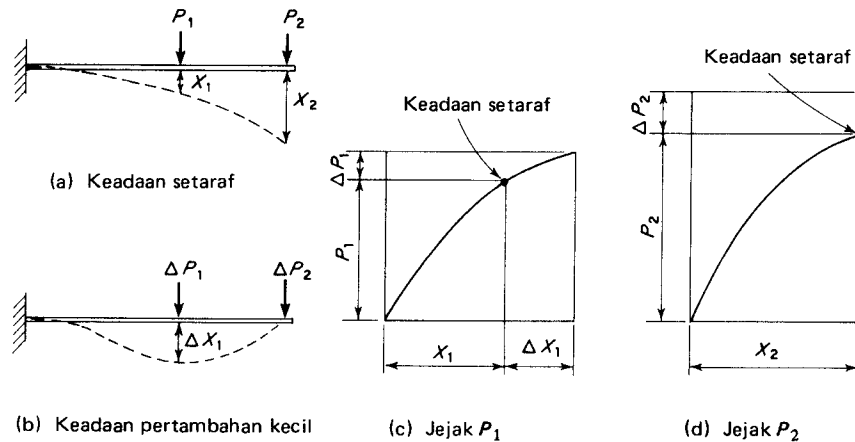
$$(8.9.1) \quad \frac{\partial(PE)}{\partial X_i} = \frac{\partial(SE)}{\partial X_i} = P_i$$

Bukti dari teorema ini dapat dibuat sebagai berikut: Tinjaulah balok konsol yang menahan dua gaya- P seperti diperlihatkan dalam Gambar 8.12a, yang keadaan setarafnya diperlihatkan dalam Gambar 8.12c dan d. Definisikan matriks kekakuan struktur langsung $[K']$ (yang dimampatkan dari matriks 4 kali 4 yang lebih umum, yang mencakup baik kelandaian maupun lendutan) sebagai

* *History of Strength of Materials*, oleh S. Timoshenko, McGraw-Hill Book Co., 1953, hal. 200.

** Dari sumber yang sama, hal. 292.

$$[K'] = \begin{array}{c|cc} & \Delta X & \\ \hline \Delta P & & \\ \hline 1 & K'_{11} & K'_{12} \\ 2 & K'_{21} & K'_{22} \end{array}$$



GAMBAR 8.12. Teorema Castigliano Pertama.

Misalkan keadaan pertambahan kecil dari Gambar 8.12b ditambahkan pada keadaan setaraf dari Gambar 8.12a. Energi potensial pertambahan kecil $\Delta(PE)$ dapat diamati dari Gambar 8.12c dan d sebagai

$$\Delta(PE) = P_1(\Delta X_1)$$

dari mana

$$(8.9.2) \quad \frac{\partial(PE)}{\partial X_1} = P_1$$

Energi potensial pelengkap pertambahan kecil $\Delta(CPE)$ dapat diamati dari Gambar 8.12c dan d sebagai

$$\Delta(CPE) = X_1(\Delta P_1) + X_2(\Delta P_2)$$

Karena hanya $\Delta X_1 \neq 0$,

$$\Delta(CPE) = X_1(K'_{11}\Delta X_1) + X_2(K'_{21}\Delta X_1)$$

dari mana

$$(8.9.3) \quad \frac{\partial(CPE)}{\partial X_1} = K'_{11}X_1 + K'_{21}X_2$$

Persamaan (8.9.2) kenyataannya adalah identik dengan Persamaan (8.9.1) bila kita dapat membayangkan subskrip "1" sebagai subskrip i , dan sekaligus berpikir secara umum bahwa mungkin ada gaya-gaya P yang lain tetapi perpindahan kecilnya adalah tidak sama dengan nol hanya pada koordinat ke i . Persamaan (8.9.3) secara mandiri tidak berguna, tetapi akan menjadi Persamaan (8.9.2) dalam sebuah struktur linear karena energi potensial pelengkap (CPE) akan sama dengan energi potensial (PE) dan elemen-elemen K'_{11} dan K'_{21} haruslah invarian sedemikian sehingga menjadikan bagian kanan dari Persamaan (8.9.3) sama dengan P , dalam keadaan setaraf.

Teorema Castigliano Pertama, seperti disuguhkan oleh Persamaan (8.9.1), adalah berguna untuk memperoleh matriks kekakuan dari sebuah elemen struktural, pertama dengan mengungkapkan regangan energi di dalam elemen dalam perpindahan-perpindahan simpul pada derajat kebebasan; kemudian, sebuah diferensiasi parsial terhadap X_i akan memberikan gaya P_i dalam semua perpindahan simpul.

Energi regangan dalam sebuah elemen balok linear dapat dinyatakan dalam momen lentur dengan Persamaan (8.2.3) sebagai

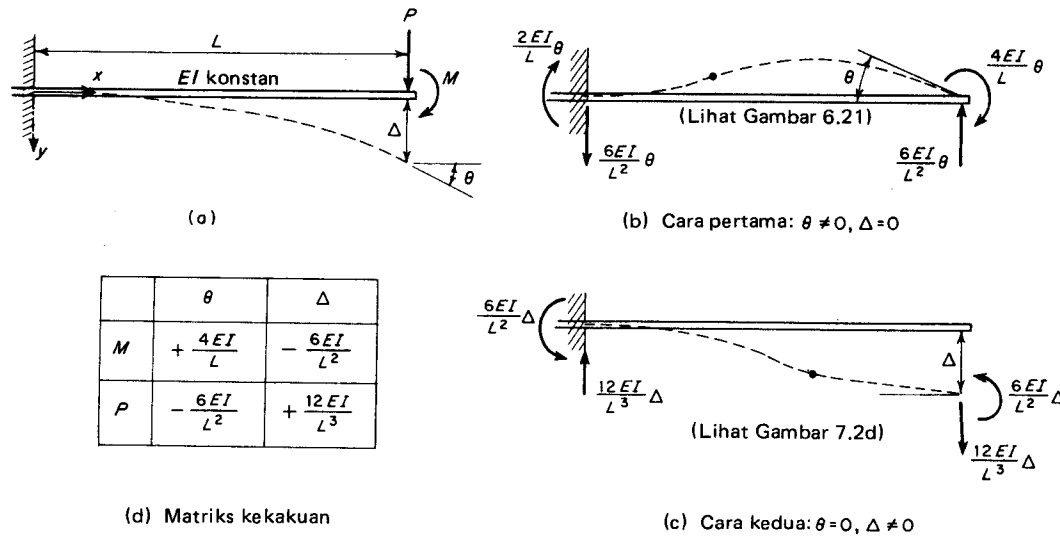
$$SE = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI}$$

atau, dalam turunan kedua dari kurva elastik sebagai

$$(8.9.4) \quad SE = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$$

Contoh Soal 8.4. Untuk balok konsol dari Gambar 8.13a, dapatkan ungkapan-ungkapan untuk M dan P sebagai fungsi-fungsi dari θ dan Δ dengan menganggap bahwa persamaan garis elastik adalah pangkat tiga (yang pada kenyataannya adalah benar) dan kemudian menerapkan Teorema Pertama Castigliano.

Penyelesaian. Sebenarnya penyelesaian terhadap soal ini, seperti diperlihatkan dalam Gambar 8.13d, dapat disusun langsung dari Gambar 6.21 dan Gambar 7.26d, yang disuguhkan kembali di sini sebagai Gambar 8.23b dan c. Perhatikan bahwa cara-cara pertama dan kedua yang diperlihatkan dalam Gambar 8.13b dan c cocok dengan kolom-kolom pertama dan kedua, dalam matriks kekakuan dari Gambar 8.13. Perhatikan pula pematuhan konvensi tanda yang ketat yang dipergunakan dalam Gambar 8.13a di mana $P-\Delta$ adalah positif bila ke bawah, dan $M-\theta$ adalah positif bila sesuai arah jarum jam.



GAMBAR 8.13. Matriks Kekakuan dari sebuah Balok Konsol.

Bila dipergunakan Teorema Pertama Castigliano, kita harus mengungkapkan energi regangan alam unsur-unsur θ dan Δ , atau dalam soal ini, keempat bilangan konstan sebarang a_1 sampai dengan a_4 dalam persamaan pangkat tiga dari kurva elastik

$$y = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

harus diungkapkan dalam ungkapan-ungkapan θ dan Δ . Dengan menggunakan keempat syarat batas dalam Gambar 8.13a sebagai berikut: 1) bila $x = 0, y = 0$, 2) bila $x = 0, dy/dx = 0$, 3) bila $x = L, y = \Delta$, dan 4) bila $x = L, dy/dx = \theta$, keempat bilangan konstan a_1 sampai dengan a_4 dapat diungkapkan dalam ungkapan-ungkapan θ dan Δ sebagai:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{\theta}{L} + \frac{3\Delta}{L^2}$$

$$a_4 = +\frac{\theta}{L^2} - \frac{2\Delta}{L^3}$$

Energi regangan dalam balok konsol dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (8.9.4), jadi

$$SE = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L (2a_3 + 6a_4x)^2 dx$$

$$= \frac{EI}{2} \left[\frac{4\theta^2}{L} - \frac{12\theta\Delta}{L^2} + \frac{12\Delta^2}{L^3} \right]$$

Dengan menggunakan Teorema Pertama Castigliano

$$M = \frac{\partial(SE)}{\partial\theta} = +\frac{4EI\theta}{L} - \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$P = \frac{\partial(SE)}{\partial\Delta} = -\frac{6EI\theta}{L^2} + \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

Hasil-hasil ini adalah identik dengan yang ada pada Gambar 8.13d, yang sebelumnya telah diperoleh sebagai dalam Gambar 8.13b dan c dengan cara geometrik-fisik (yaitu luas-momen).

LATIHAN 8.3

Nyatakan momen-momen ujung searah jarum jam M_i dan M_j yang harus diterapkan pada sebuah balok prismatik dengan dua ujung sendi dinyatakan dalam perputaran-perputaran ujung searah jarum jam ϕ_i dan ϕ_j , dengan menganggap bahwa persamaan dari kurva elastik adalah pangkat tiga (hal mana kenyataannya adalah benar demikian) dan kemudian menerapkan Teorema Pertama Castigliano.

8.10 Teorema Kedua Castigliano

Teorema kedua Castigliano dapat dinyatakan sebagai: "Turunan parsial dari energi potensial-pelengkap, atau energi regangan-pelengkap, sehubungan dengan sebuah gaya pada sebarang titik pada sebuah struktur, adalah sama dengan perpindahan dalam arah gaya," atau, dalam bentuk simbolik

$$(8.10.1) \quad \frac{\partial(CPE)}{\partial P_i} = \frac{\partial(CSE)}{\partial P_i} = X_i$$

Bukti dari teorema ini dapat dibuat sebagai berikut: Tinjaulah balok konsol yang menahan dua gaya P seperti diperlihatkan dalam Gambar 8.14a, yang keadaan setarafnya diperlihatkan dalam Gambar 8.14c dan d. Tentukan matriks kelenturan struktur langsung $[\delta']$ sebagai

$$[\delta'] = \begin{array}{c|cc} & \Delta P & \\ \hline \Delta X & & \\ \hline 1 & \delta'_{11} & \delta'_{12} \\ 2 & \delta'_{21} & \delta'_{22} \end{array}$$

Misalkan keadaan pertambahan dari Gambar 8.14b ditambahkan pada keadaan setaraf dari Gambar 8.14a. Energi potensial pertambahan $\Delta(PE)$ yang dapat diamati dari Gambar 8.14c dan d adalah

$$\Delta(PE) = P_1(\Delta X_1) + P_2(\Delta X_2)$$

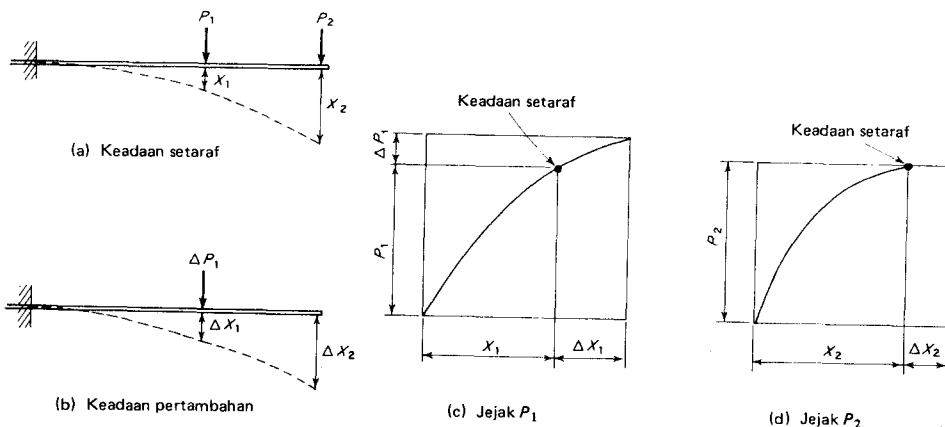
Karena hanya $\Delta P_1 \neq 0$,

$$\Delta(PE) = P_1(\delta'_{11}\Delta P_1) + P_2(\delta'_{21}\Delta P_1)$$

dari mana

$$(8.10.2) \quad \frac{\partial(PE)}{\partial P_1} = \delta'_{11}P_1 + \delta'_{21}P_2$$

Energi potensial-pelengkap pertambahan yang dapat juga diamati dari Gambar 8.14c dan d adalah



GAMBAR 8.14. Teorema Kedua Castigliano.

$$\Delta(CPE) = X_i(\Delta P_i)$$

dari mana

$$(8.10.3) \quad \frac{\partial(CPE)}{\partial P_i} = X_i$$

Persamaan (8.10.3) pada kenyataannya adalah identik dengan Persamaan (8.10.i), bila kita dapat membayangkan subskrip "1" menjadi subskrip i , dan sekaligus berpikir secara umum bahwa mungkin ada gaya-gaya P yang lain tetapi gaya tambahan adalah tidak nol hanya pada koordinat ke i . Persamaan (8.10.2) secara mandiri tidak berguna, tetapi akan menjadi Persamaan (8.10.3) dalam sebuah struktur linear karena energi potensial (PE) kemudian akan sama dengan energi potensial pelengkap (CPE) dan elemen-elemen δ'_{11} dan δ'_{21} haruslah invarian sedemikian menjadikan bagian kanan dari Persamaan (8.10.2) sama dengan X_1 dalam keadaan setaraf.

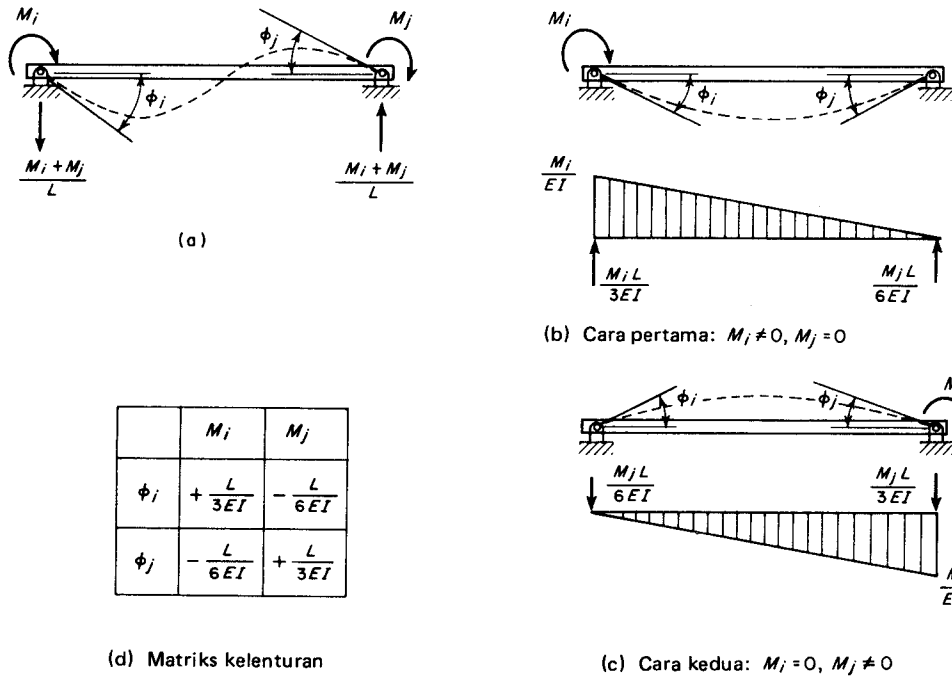
Teorema Castigliano kedua, seperti disuguhkan oleh Persamaan (8.10.1), adalah berguna untuk memperoleh matriks kelenturan dari sebuah unsur struktur pertama dengan mengungkapkan energi regangan-pelengkap di dalam elemen dalam gaya-gaya pada derajat kebebasan; kemudian, sebuah diferensi parsial terhadap P_i akan memberikan perpindahan X_i diungkapkan dalam semua gaya-gaya.

Energi regangan-pelengkap pada sebuah unsur balok linear haruslah sama dengan energi regangan, jadi, Persamaan (8.2.3) dapat dinyatakan kembali sebagai

$$(8.10.4) \quad SE = CSE = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI}$$

Contoh Soal 8.5. Nyatakan perputaran-perputaran searah jarum jam ϕ_i dan ϕ_j pada ujung-ujung dari balok prismatik dengan kedua ujungnya bersendi yang diungkapkan dalam momen-momen ujung searah jarum jam M_i dan M_j dengan menerapkan Teorema Castigliano Kedua.

Penyelesaian. Sebenarnya penyelesaian dari persoalan ini, seperti diperlihatkan oleh Gambar 8.15d, dapat langsung dirakit dari hasil-hasil penerapan Teorema Balok Gabungan I untuk balok-balok sederhana yang diperlihatkan dalam Gambar 8.15b dan c. Perhatikan bahwa cara-cara pertama dan kedua diperlihatkan dalam Gambar 8.15b dan c sesuai dengan kolom-kolom pertama dan kedua dalam matriks kelenturan dari Gambar 8.15d. Perhatikan pula pematuhan secara ketat terhadap konvensi tanda yang dipergunakan dalam Gambar 8.15a di mana kedua pasang $M_i-\phi_i$ dan $M_j-\phi_j$ adalah positif bila searah dengan jarum jam.



(d) Matriks kelenturan

(c) Cara kedua: $M_i = 0$, $M_j \neq 0$ **GAMBAR 8.15.** Matriks Kelenturan dari sebuah Balok Sederhana.

Meskipun Teorema kedua Castigliano menyebut energi pelengkap bukannya energi "regular," keduanya adalah sama untuk sebuah struktur linear, jadi, dengan merujuk pada Gambar 8.15a,

$$CSE = SE = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI} = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(M_i - \frac{M_i + M_j}{L} x \right)^2 dx$$

$$= \frac{M_i^2 L}{6EI} - \frac{M_i M_j L}{6EI} + \frac{M_j^2 L}{6EI}$$

Dengan menggunakan Teorema kedua Castigliano,

$$\phi_i = \frac{\partial(CSE)}{\partial M_i} = +\frac{M_i L}{3EI} - \frac{M_j L}{6EI}$$

$$\phi_j = \frac{\partial(CSE)}{\partial M_j} = -\frac{M_i L}{6EI} + \frac{M_j L}{3EI}$$

Hasil-hasil ini identik dengan yang pada Gambar 8.15d, yang telah diperoleh lebih dulu dengan cara fisik-geometrik (yaitu balok-terpadu).

LATIHAN 8.4

Dengan cara Teorema Castigliano Kedua, tunjukkan perputaran searah jarum jam θ dan lendutan ke bawah Δ pada ujung bebas dari sebuah balok konsol prismatik yang dinyatakan dalam momen searah jarum jam M dan sebuah gaya ke bawah P , keduanya diterapkan secara simultan pada ujung yang bebas.

8.11 Penurunan Cara Beban-Satuan dari Teorema Castigliano Kedua

Secara kronologis cara beban-satuan untuk mendapatkan lendutan rangka, pertama-tama diusulkan oleh Maxwell* pada tahun 1864 tetapi tetap tidak dikenal sampai kemudian ditemukan kembali secara mandiri oleh Mohr** pada tahun 1874. Cara beban-satuan untuk rangka baru berlaku umum untuk balok-balok dan kerangka-kerangka berkat usaha Castigliano*** dalam tahun 1879 lewat teorema keduanya.

Seperti telah disebutkan terdahulu dalam Pasal 8.9, Castigliano pada tahun 1879 menggunakan turunan parsial dari energi potensial atau regangan potensial pada kedua teoremanya: Engesser pada tahun 1889 menekankan bahwa, untuk struktur-struktur nonlinear, penggunaan dari energi "regular" adalah masih benar dalam teorema pertama, tetapi energi pelengkap harus digunakan dalam teorema kedua.

Cara beban-satuan untuk mendapatkan lendutan-lendutan dalam rangka linear dapat diturunkan dari Teorema Castigliano kedua sebagai berikut:

$$X_i = \frac{\partial(CSE)}{\partial P_i} = \frac{\partial(SE)}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\Sigma \frac{F^2 L}{2AE} \right) = \Sigma \left(\frac{FL}{AE} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial P_i} \right)$$

$$= \Sigma \left(e \text{ dalam keadaan sepadan} \right) \left(F \text{ akibat beban satuan yang sebenarnya} \right) \left(\text{dalam keadaan setimbang} \right)$$

yang adalah Persamaan (3.6.2). Sama halnya, cara beban-satuan untuk mendapatkan lendutan kelandaian pada balok-balok linear dan kerangka-kerangka kaku dapat diturunkan:

$$X_i = \frac{\partial(CSE)}{\partial P_i} = \frac{\partial(SE)}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\int \frac{M^2 dx}{2EI} \right) = \int \frac{M(\partial M / \partial P_i) dx}{EI}$$

$$= \int \frac{M m dx}{EI}$$

* *History of Strength of Material*, oleh S. P. Timoshenko, McGraw-Hill Book Company, 1953, hal. 202.

** Dari sumber yang sama, hal. 207.

*** Dari sumber yang sama, hal. 292.

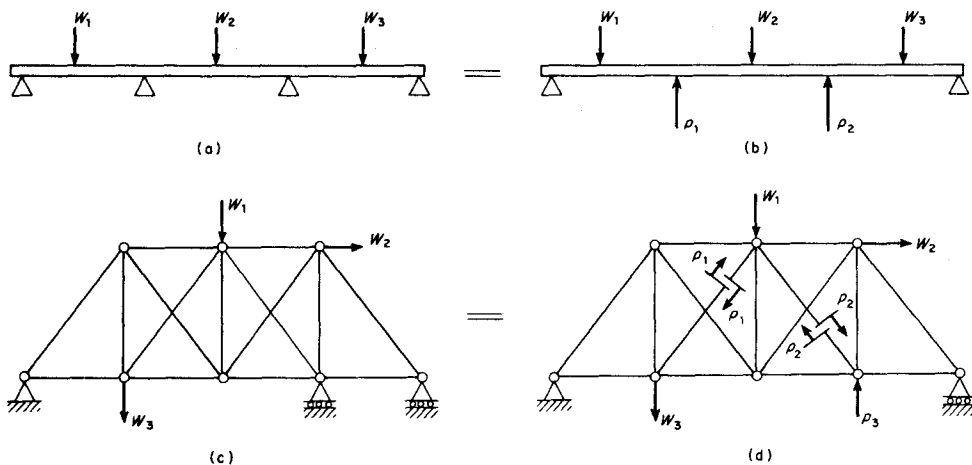
yang adalah Persamaan (5.7.6) atau Persamaan (5.7.7).

8.12 Teorema Kerja Terkecil

Teorema Kerja Terkecil dapat dinyatakan sebagai: "Gaya-gaya kelebihan dalam sebuah struktur statik tidak tertentu adalah sedemikian rupa sehingga jumlah energi regangan-pelengkap adalah minimum." Bila rujukan hanya dibuat terhadap struktur linear, energi regangan "regular" dapat dipergunakan sebagai pengganti energi regangan-pelengkap.

Gaya-gaya kelebihan dalam sebuah struktur statik tidak tertentu telah didefinisikan dalam Pasal 4.3 untuk rangka, dalam Pasal 6.4 dan 6.5 untuk balok-balok, dan dalam Pasal 7.4 untuk kerangka-kerangka kaku. Pada analisis cara gaya, gaya-gaya kelebihan ini harus diselesaikan dulu berdasarkan persamaan-persamaan kesepadanan dari perubahan bentuk, dalam hubungan satu lawan satu dengan gaya-gaya kelebihan. Akan diperlihatkan bahwa Teorema Kerja Terkecil akan menghasilkan sebuah himpunan persamaan yang identik dengan persamaan-persamaan kesepadanan dalam cara gaya.

Kesahihan dari Teorema Kerja Terkecil dapat dikembangkan dengan memandang struktur-struktur yang khas dalam Gambar 8.16. Balok statik tidak tertentu dari Gambar 8.16 dapat dipandang sebagai sebuah balok statik tertentu dengan derajat lebih rendah dari Gambar 8.16b yang menahan beban-beban yang diterapkan dan gaya-gaya kelebihan yang tidak diketahui p_1 dan p_2 . Rangka statik tidak tertentu dari Gambar 8.16c dapat dipandang



GAMBAR 8.16. Teorema dari Kerja Terkecil.

sebagai sebuah rangka statik tidak tertentu dengan derajat lebih rendah yang menahan beban-beban kerja dan gaya-gaya kelebihan yang tidak dikenal p_1, p_2 dan p_3 di mana pasangan-pasangan gaya-gaya kolinear p_1-p_1 dan p_2-p_2 diterapkan sebagai gaya-gaya tarik pada ujung dari batang-batang yang terpotong. Karena lendutan x_i dalam arah sebuah gaya reaksi kelebihan p_i pada sebuah penyangga yang kaku, atau jarak tumpang tindih x_i dalam arah pasangan gaya-gaya tarik kolinear p_i-p_i yang bekerja pada ujung-ujung terpotong haruslah sama dengan nol, maka dengan penerapan Teorema Castigliano Kedua memberikan

$$(8.12.1) \quad x_i = \frac{\partial(CSE)}{\partial p_i} = 0 \text{ (untuk } i = 1 \text{ sampai } i = \text{derajat ketergantungan)}$$

yang merupakan Teorema dari Kerja Terkecil.

Karena x_i adalah lendutan pada koordinat ke i dalam keadaan setaraf (yang merupakan keadaan sebenarnya yang diselesaikan)

$$(8.12.2) \quad x_i = \sum \delta_{ij} p_j \text{ (untuk } j = 1 \text{ sampai } j = \text{jumlah keseluruhan dari gaya-gaya eksternal yang bekerja pada struktur dengan derajat lebih rendah yang ekuivalen).}$$

Turunan parsial kedua dari energi regangan-pelengkap sehubungan dengan x_i adalah

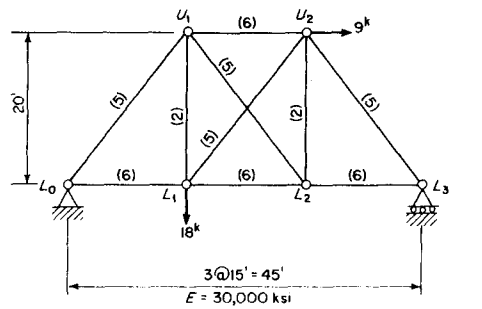
$$(8.12.3) \quad \frac{\partial^2(CSE)}{\partial p_i^2} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \delta_{ii}$$

yang harus positif sehubungan dengan kenyataan bahwa pada sebuah cara dasar di mana hanya $p_i \neq 0$, energi potensial adalah $\frac{1}{2}(\delta_{ii} p_i)(p_i)$.

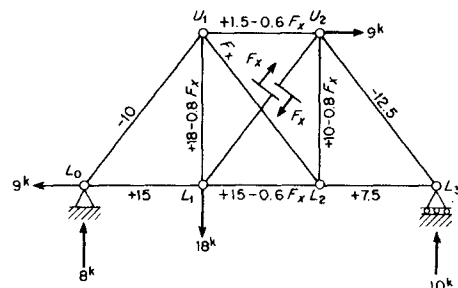
Dalam analisis dari cara gaya persamaan-persamaan kesepadanan $x_i = 0$ untuk $i = 1$ sampai $i = \text{derajat ketidaktertentuan}$ dipergunakan secara langsung begitu saja. Kemudian lendutan-lendutan yang disyaratkan dalam koordinat ke i dari struktur dengan derajat lebih rendah akibat beban-beban kerja dan akibat dari tiap nilai satuan dari gaya-gaya kelebihan yang tidak diketahui dapat diperoleh berdasarkan cara-cara geometrik-fisik atau beban-satuan. Karena penggunaan cara beban-satuan pada cara gaya aslinya dikembangkan oleh Maxwell dan Mohr (lihat Pasal 8.11), hasil dari persamaan-persamaan kesepadanan dari cara gaya kadang-kadang disebut *Persamaan-persamaan Maxwell-Mohr*.

Dengan menggunakan Teorema Kerja Terkecil untuk analisis struktur-struktur statik tidak tertentu, persamaan-persamaan turunan parsial,

$$\frac{\partial(CSE)}{\partial p_i} = 0 \text{ (untuk } i = 1 \text{ sampai } i = \text{derajat ketidaktertentuan)}$$



Angka-angka di dalam kurung adalah luas dalam inci kuadrat
(a) Rangka yang diketahui



(b) Gaya-gaya dalam batang-batang

GAMBAR 8.17. Penyelesaian Teorema Kerja-Terkecil (Contoh Soal 8.6).

dipergunakan secara langsung. Untuk struktur-struktur *linear*, energi regangan di dalam struktur pertama-tama diungkapkan dalam gaya-gaya kelebihan, kemudian persamaan-persamaan kesepadanan diperoleh dengan turunan parsial dari energi regangan sehubungan dengan tiap gaya-gaya kelebihan disamakan dengan nol. Tentu saja, persamaan-persamaan yang diperoleh adalah identik dengan Persamaan-persamaan Maxwell-Mohr. Akan tetapi, Teorema Kerja-Terkecil adalah yang paling serasi, dan mungkin merupakan konsep yang paling penting dalam seluruh bab tentang "Teori Struktur-struktur Statik Tidak Tertentu."

Contoh Soal 8.6. Tentukan, dengan Teorema Kerja Terkecil, persamaan kesepadanan yang diperoleh untuk rangka statik tidak tertentu dari Contoh 4.1, yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 8.17a.

Penyelesaian. Dengan menggunakan gaya dalam batang L_1U_2 sebagai gaya kelebihan, persamaan telah diperoleh dengan cara gaya dalam Contoh 4.1 menjadi

$$-124.5 + 9.84F_x = 0$$

Berdasarkan Teorema Kerja Terkecil, persamaan kesepadanan adalah

$$\frac{\partial(CSE)}{\partial F_x} = \frac{\partial(SE)}{\partial F_x} = \frac{\partial}{\partial F_x} \left[\sum \frac{F^2 L}{2AE} \right] = \sum \left[\frac{FL}{AE} \left(\frac{\partial F}{\partial F_x} \right) \right] = 0$$

Ungkapan-ungkapan untuk F dalam Tabel 8.1 diambil dari Gambar 8.17b; gaya-gaya ini kenyataannya adalah superposisi dari gaya-gaya akibat beban-

TABEL 8.1. Penyelesaian Teorema Kerja-Terkecil—Contoh Soal 8.6.

No.	Batang	F	$\frac{\partial F}{\partial F_x}$	$\frac{L}{EA} (10^{-3} \text{ in.})$	$\frac{FL}{EA} \left(\frac{\partial F}{\partial F_x} \right)$
1	U_1U_2	$+ 1.5 - 0.6F_x$	-0.6	1.0	$- 0.9 + 0.36F_x$
2	L_0L_1	+15.0		1.0	
3	L_1L_2	$+15.0 - 0.6F_x$	-0.6	1.0	$- 9.0 + 0.36F_x$
4	L_2L_3	+ 7.5		1.0	
5	U_1L_1	$+18.0 - 0.8F_x$	-0.8	4.0	$- 57.6 + 2.56F_x$
6	U_2L_2	$+10.0 - 0.8F_x$	-0.8	4.0	$- 32.0 + 2.56F_x$
7	L_0U_1	-10.0		2.0	
8	U_1L_2	$-12.5 + 1.0F_x$	+1.0	2.0	$- 25.0 + 2.00F_x$
9	L_1U_2	$+ 1.0F_x$	+1.0	2.0	$+ 2.00F_x$
10	U_2L_3	-12.5		2.0	
Jumlah					$-124.5 + 9.84F_x$

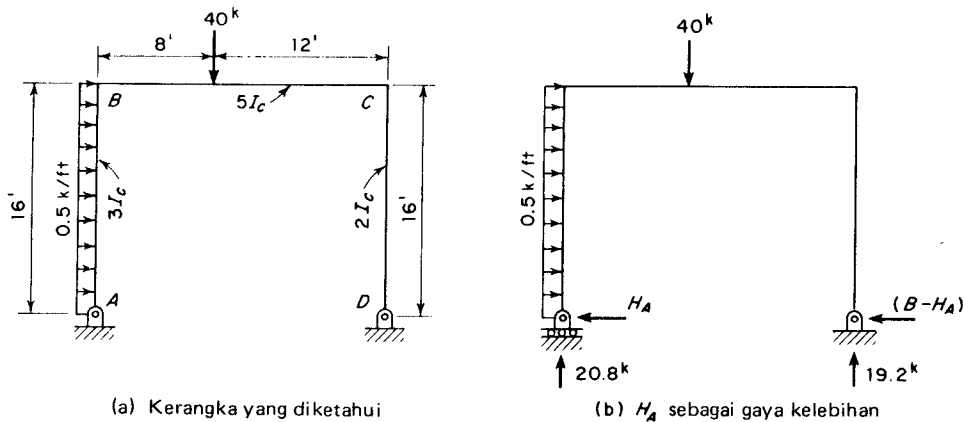
beban kerja dan akibat pasangan gaya-gaya sisa F_x dan F'_x . Perhatikan bahwa pada penyelesaian yang sekarang ini, batang kelebihan L_1U_2 hanya dipotong, tetapi tidak dipindahkan; oleh karena itu, batang tersebut haruslah dimasukkan dalam tabulasi seperti halnya batang-batang yang lainnya. Bila batang kelebihan dihilangkan seperti dalam Contoh 4.1, persamaan kesepadanan ditentukan oleh persyaratan-persyaratan fisik perpindahan relatif antara simpul-simpul L_1 dan U_2 haruslah sama dengan pertambahan panjang dari batang.

Contoh Soal 8.7. Tentukan persamaan kesepadanan untuk kerangka kaku statik tertentu dari Contoh 7.3, yang diperlihatkan lagi dalam Gambar 8.18a, dengan Teorema Kerja Terkecil.

Penyelesaian. Dengan menggunakan reaksi horisontal H_A sebagai gaya sisa, persamaan kesepadanan telah diperoleh dengan cara gaya dalam Contoh 7.3 sebagai berikut

$$\frac{20480}{3} - \frac{19456}{9} H_A = 0$$

Berdasarkan Teorema Kerja Terkecil, persamaan kesepadanan adalah



GAMBAR 8.18. Penyelesaian Teorema Kerja Terkecil (Contoh Soal 8.7).

$$\frac{\partial(CSE)}{\partial H_A} = \frac{\partial(SE)}{\partial H_A} = \frac{\partial}{\partial H_A} \left[\sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = 0$$

Dengan merujuk pada Gambar 8.18b,

$$\begin{aligned} SE = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} &= \frac{1}{2E(3I_c)} \int_0^{16} \left[H_A x - \frac{0.5x^2}{2} \right]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2E(5I_c)} \int_0^8 [20.8x - 64 + 16H_A]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2E(5I_c)} \int_0^{12} [19.2x - (8 - H_A)(16)]^2 dx \\ &+ \frac{1}{2E(2I_c)} \int_0^{16} [(8 - H_A)x]^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(SE)}{\partial H_A} &= \frac{1}{E(3I_c)} \int_0^{16} \left[H_A x - \frac{0.5x^2}{2} \right] (x) dx \\ &+ \frac{1}{E(5I_c)} \int_0^8 [20.8x - 64 + 16H_A] (16) dx \\ &+ \frac{1}{E(5I_c)} \int_0^{12} [19.2x - 12.8 + 16H_A] (16) dx \\ &+ \frac{1}{E(2I_c)} \int_0^{16} [8x - H_A x] (-x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{4096}{9} H_A - \frac{4096}{3} \right] + [+491.52 + 409.6H_A] + [-491.52 + 614.4H_A] \\ &+ \left[-\frac{16384}{3} + \frac{2048}{3} H_A \right] \\ &= \frac{19456}{9} H_A - \frac{20480}{3} = 0 \end{aligned}$$

LATIHAN 8.5

Tentukan persamaan kesepadanan dari rangka dalam Latihan 4.1 dengan menggunakan gaya dalam batang L_1 U_2 sebagai gaya kelebihan dengan Teorema Kerja Terkecil.

LATIHAN 8.6

Tentukan persamaan kesepadanan dari kerangka kaku dalam Latihan 7.3 dengan menggunakan reaksi horizontal di D sebagai gaya kelebihan dengan Teorema Kerja Terkecil.

8.13 Catatan Penutup

Teorema-teorema energi yang penting dalam analisis struktural telah disusun dan dibahas dalam bab ini. Hanya apabila bahan dari tujuh bab yang pertama diasimilasikan sepenuhnya, teorema-teorema dapat diterangkan dengan mempergunakan beberapa pengalaman yang lampau.

Dua golongan yang terpisah tentang teorema-teorema kerja dan energi telah dipaparkan; yakni teorema yang berhubungan dengan kerja sebenarnya, kerja virtual, hubungan transposisi dan teorema kebalikan dalam Pasal 8.2 sampai 8.6; dan yang berhubungan dengan kedua teorema Castigliano dalam Pasal 8.8 sampai 8.12. Kecuali Prinsip Kerja Nyata, teorema-teorema dalam golongan pertama hanya berlaku untuk struktur-struktur linear atau struktur-struktur tidak linear dengan pertambahan yang dilinearkan, tetapi yang tergolong dalam golongan kedua dapat diterapkan pada struktur-struktur baik linear maupun tidak linear.

Teorema Castigliano Pertama adalah berguna untuk menetapkan matriks kekakuan; teorema Castigliano kedua untuk matriks kelenturan. Yang terdahulu adalah berhubungan dengan cara analisis perpindahan; yang terakhir dengan cara analisis gaya. Sampai saat ini, kedua teorema Castigliano, yang dinyatakan pertama pada tahun 1879, merupakan dasar dari Teori Struktur-struktur.

Garis-garis Pengaruh dan Beban Hidup yang Bergerak

9

9.1 Beban Tetap dan Beban Hidup yang Bergerak

Beban tetap pada struktur adalah beban dengan besar yang konstan dan kedudukan yang tetap. Contohnya adalah berat mati dari struktur itu sendiri dan beban dari instalasi-instalasi permanen seperti tembok, mesin, atau perlengkapan. Struktur sering juga dibangun untuk memikul beban-beban seperti manusia, perkakas rumahtangga, tekanan bahan cair atau lalu lintas; beban-beban ini adalah beban-beban hidup yang bergerak karena beban-beban tersebut mungkin berada atau tidak berada dalam suatu rentang kedudukan. Penentuan kedudukan kritis dari sebuah beban hidup sebarang atau gabungan dari beberapa beban hidup yang menyebabkan sebuah reaksi eksternal yang maksimum atau gaya internal, yang dapat berupa gaya aksial dalam sebuah batang dari sebuah rangka atau momen lentur pada sebuah penampang dalam sebuah kerangka kaku, merupakan suatu pokok yang sangat penting dalam analisis struktur.

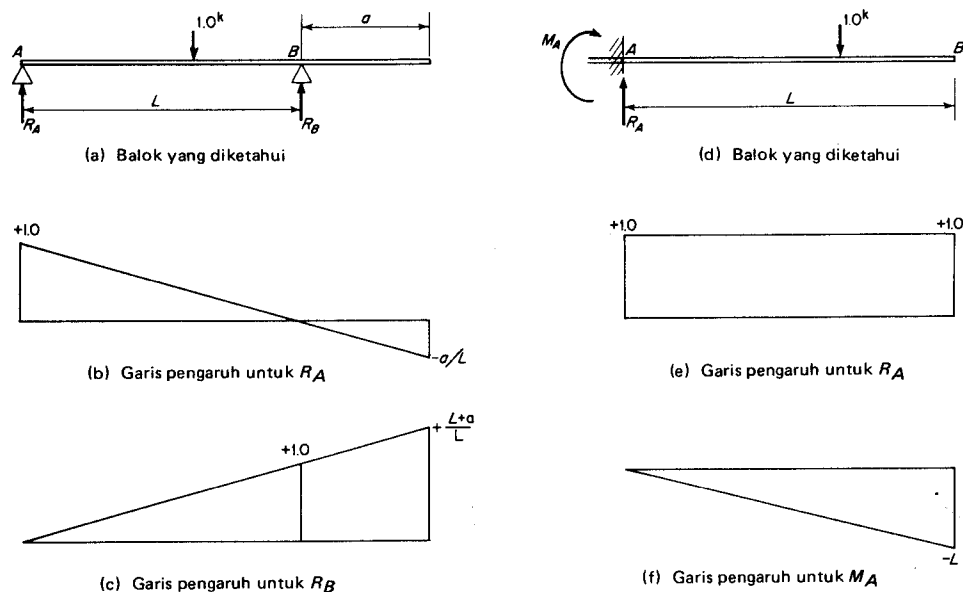
Akan diperlihatkan bahwa konstruksi garis-garis pengaruh adalah merupakan kunci untuk penyelesaian bagi kedudukan-kedudukan kritis dari beban-beban hidup yang bergerak.

9.2 Garis-garis Pengaruh untuk Reaksi-reaksi pada Balok-balok Statik Tidak Tertentu

Garis pengaruh (influence line) untuk sebuah fungsi adalah grafik yang menunjukkan nilai dari fungsi tersebut akibat dari sebuah beban terpusat tung-

gal yang bergerak sepanjang sebuah struktur, di mana nilai dari fungsi digambarkan secara langsung pada kedudukan dari beban tunggal tersebut. Garis-garis pengaruh untuk struktur-struktur statik tertentu terdiri dari segmen-segmen lurus karena fungsi-fungsi (reaksi-reaksi gaya eksternal atau gaya internal) adalah selalu linear sehubungan dengan kedudukan dari beban terpusat tunggal.

Garis-garis pengaruh untuk dua reaksi R_A dan R_B pada balok konsol dari Gambar 9.1 diperlihatkan dalam Gambar 9.1b dan c; untuk kedua reaksi R_A dan M_A pada balok konsol dalam Gambar 9.1a diperlihatkan dalam Gambar 9.1b dan c; dan untuk kedua reaksi R_A dan M_A pada balok konsol dari Gambar 9.1d, diperlihatkan dalam Gambar 9.1e dan f. Dalam tiap kejadian garis pengaruh adalah grafik dari fungsi ketika beban tunggal bergerak sepanjang balok. Misalnya, untuk menguji Gambar 9.1b, hanya perlu mencatat bahwa R_A diperoleh dengan mengambil momen dari beban satuan terhadap titik B dan kemudian membagi momen tersebut dengan jarak L . Pembaca seyogyanya berpikir mengikuti keempat garis pengaruh yang diperlihatkan dalam Gambar 9.1 secara pelan-pelan dan berhati-hati.



GAMBAR 9.1. Garis-garis Pengaruh untuk Reaksi-reaksi dari Balok-balok Konsol malar dan Konsol.

Karena ordinat pengaruh pada tiap tempat adalah nilai dari fungsi akibat sebuah satuan beban pada tempat tersebut, nilai dari fungsi akibat *pengaruh* dari beberapa beban seperti W_1 - W_2 - W_3 dalam Gambar 9.2a dan b haruslah

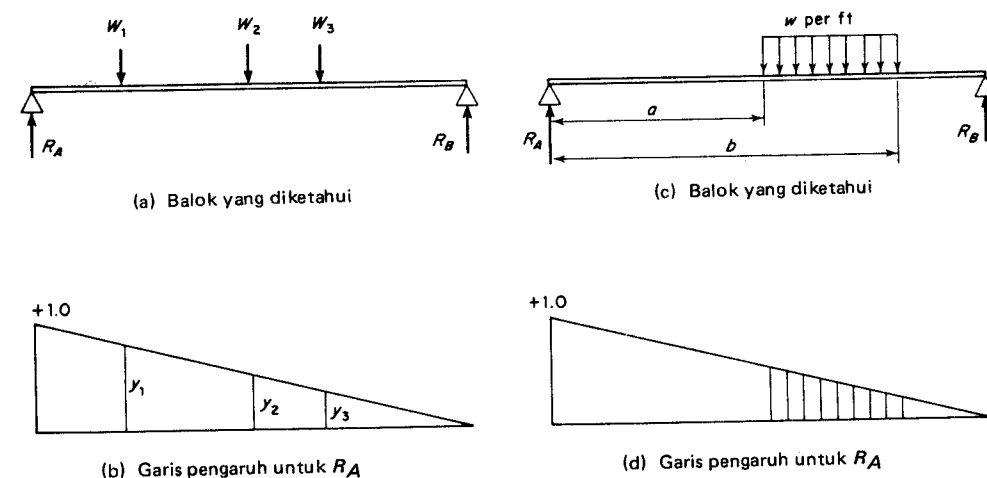
$$(9.2.1) \quad R_A = W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3$$

Di sini kita dapat memandang baik W_1 - W_2 - W_3 sebagai nilai banding tanpa dimensi dengan y_1 - y_2 - y_3 dalam kips, ataupun W_1 - W_2 - W_3 dalam kips dengan y_1 - y_2 - y_3 sebagai nilai banding tanpa dimensi. Selanjutnya, nilai dari fungsi akibat suatu beban terbagi rata dengan panjang tertentu seperti w dalam Gambar 9.2c dan d adalah

$$(9.2.2) \quad R_A = \int_a^b (w \, dx)(y) = w \int_a^b y \, dx$$

Di sini kita dapat memandang baik w sebagai sebuah nilai banding tanpa dimensi tiap foot (kaki) dan luas dari diagram pengaruh di bawah beban terbagi rata dalam ft-kips, maupun w dalam kips tiap kaki dan ordinat-ordinat pengaruh sebagai nilai banding tanpa dimensi.

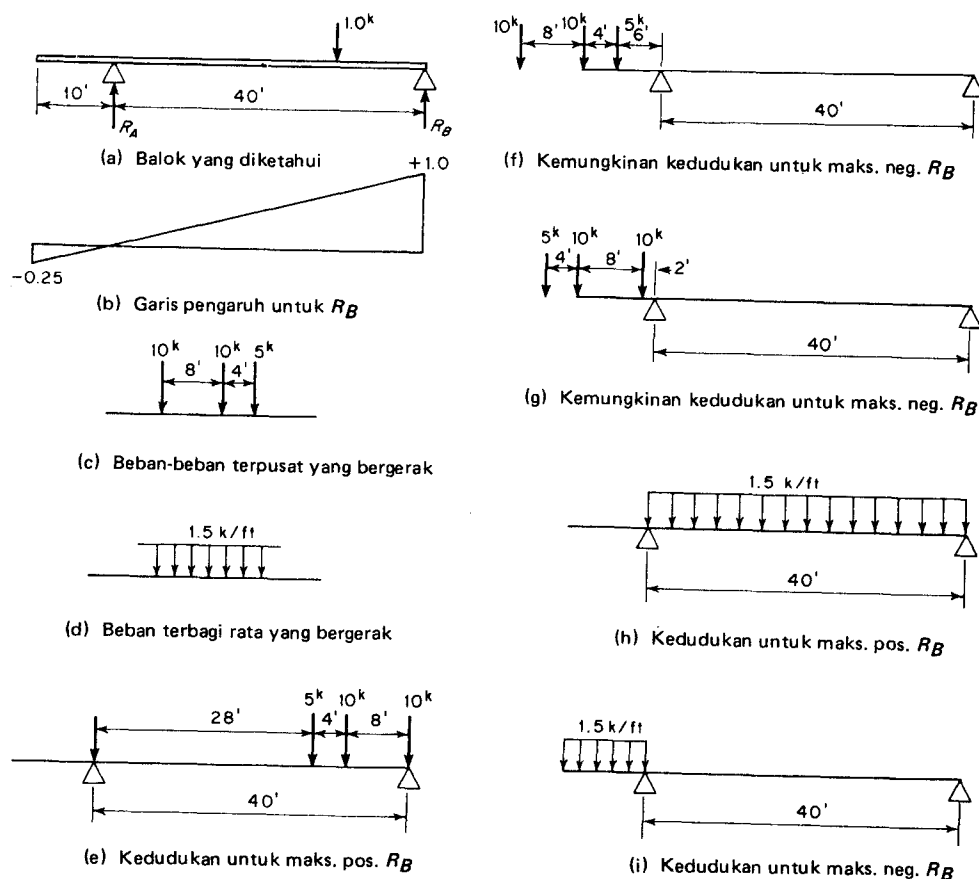
Garis pengaruh pertama berguna untuk menentukan, pada banyak kejadian-kejadian dengan pengamatan visual, kedudukan kritis dari serangkaian beban terpusat yang bergerak yang diketahui besar maupun jarak-jarak antaranya, atau pada beban terbagi rata yang bergerak dengan panjang tertentu atau panjang tanpa batas. Sekali kedudukan kritis telah didapat, nilai kri-



GAMBAR 9.2. Perhitungan untuk Fungsi-fungsi dengan Garis-garis Pengaruh.

tis dari fungsi itu sendiri dapat dihitung baik berdasarkan Persamaan (9.2.1) dan (9.2.2) maupun dengan cara-cara biasa dari analisis-analisis struktural untuk beban-beban tetap. Disarankan untuk menghitung ini dengan kedua cara sehingga dapat melihat bahwa didapatkan hasil-hasil yang sama.

Contoh Soal 9.1. Konstruksikan garis pengaruh R_B pada balok konsol malar dari Gambar 9.3a; dan tentukan nilai-nilai maksimum positif dan maksimum negatif dari R_B akibat beban yang bergerak: a) tiga beban terpusat dari Gambar 9.3c untuk kedua arah; dan b) beban terbagi rata dengan panjang tak terbatas dari Gambar 9.3d.



GAMBAR 9.3. Reaksi Maksimum pada suatu Balok Konsol Malar.

Penyelesaian. Garis pengaruh untuk R_B diperlihatkan dalam Gambar 9.3b.

(a) *Beban-beban terpusat.* Kedudukan kritis untuk nilai positif maksimum dari R_B ditentukan secara visual dan diperlihatkan dalam Gambar 9.3e; nilainya dihitung dengan Persamaan (9.2.1) menjadi

$$\begin{aligned} \text{Maks. pos. } R_B &= \sum W y = 10(1.0) + 10(32/40) + 5(28/40) \\ &= 10 + 8 + 3.5 = +21.5 \text{ kips} \end{aligned}$$

atau dengan meninjau bagian-lepas dari Gambar 9.3e,

$$\begin{aligned} \text{Maks. pos. } R_B &= \frac{\text{momen-momen terhadap A}}{40} = \frac{5(28) + 10(32) + 10(40)}{40} \\ &= \frac{860}{40} = +21.5 \text{ kips (cocok)} \end{aligned}$$

Karena kedudukan kritis untuk nilai maksimum negatif dari R_B dapat berupa Gambar 9.3f maupun g, adalah perlu untuk menghitung nilai-nilai untuk kedua kejadian tersebut. Nilai-nilai tersebut adalah -3.25 dan -3.00 kips. Jadi Gambar 9.3f memberikan

$$\text{Maks. neg. } R_B = -3.25 \text{ kips}$$

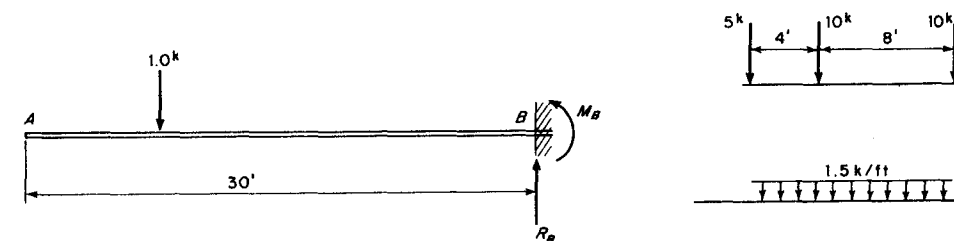
(b) *Beban terbagi rata.* Dari Gambar 9.3h,

$$\text{Maks. pos. } R_B = \frac{1.5(40)}{2} = +30 \text{ kips}$$

dan, dari Gambar 9.3i,

$$\text{Maks. neg. } R_B = -\frac{1.5(10)^2/2}{40} = -\frac{75}{40} = -1.875 \text{ kips}$$

Nilai-nilai tersebut di atas dapat diuji dengan menggunakan Persamaan (9.2.2.).



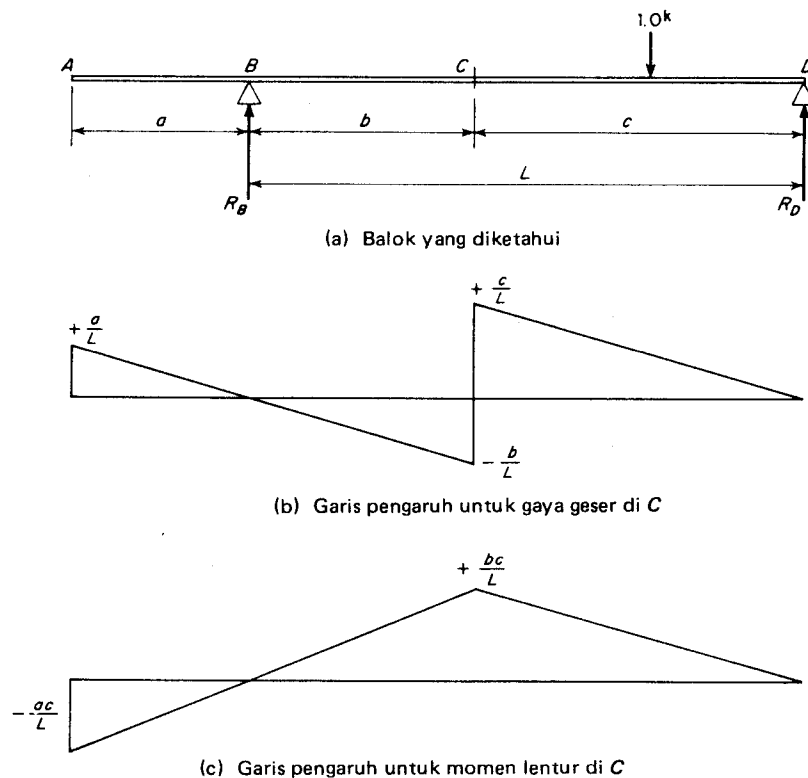
GAMBAR 9.4. Latihan 9.1.

LATIHAN 9.1

Dengan merujuk pada Gambar 9.4 konstruksikanlah garis-garis pengaruh untuk R_B dan M_B yang bekerja pada balok konsol. dan tentukan nilai-nilai maksimum positif dan maksimum negatif akibat dari beban yang bergerak dari: a) tiga beban terpusat pada kedua arah; dan b) beban terbagi rata dengan panjang tak terbatas.

9.3 Garis-garis Pengaruh untuk Gaya Geser dan Momen Lentur pada Balok-balok Statik Tidak Tertentu

Garis-garis pengaruh untuk gaya geser dan momen lentur pada sebuah penampang yang dipilih pada sebuah balok statik tertentu dapat dikonstruksikan dengan menghitung ordinat-ordinat pengaruh pada kedudukan-kedudukan kritis dari satuan beban, dan kemudian menghubungkan titik-titik kritis dengan garis-garis lurus. Misalnya, ordinat-ordinat kritis pada garis pengaruh dalam Gambar 9.5b untuk gaya geser pada penampang C dari ba-



GAMBAR 8.5. Garis-garis Pengaruh untuk Gaya Geser dan Momen Lentur.

lok konsol malar dari Gambar 9.5 adalah

- 1) untuk sebuah beban satuan di A ,

$$V_C = -1 + R_B = -1 + \frac{a+L}{L} = +\frac{a}{L}$$

- 2) untuk sebuah beban satuan di B ,

$$V_C = -1 + R_B = -1 + 1 = 0$$

- 3) untuk sebuah beban satuan pada sebuah penampang tepat di sebelah kiri dari C ,

$$V_C = R_B - 1 = \frac{c}{L} - 1 = -\frac{b}{L}$$

- 4) untuk sebuah beban satuan pada sebuah penampang tepat di sebelah kanan dari C ,

$$V_C = R_B = +\frac{c}{L}$$

- 5) untuk sebuah beban satuan di D ,

$$V_C = R_B = 0$$

Ordinat-ordinat kritis pada garis pengaruh (Gambar 9.5c) untuk momen lentur pada penampang C adalah

- 1) untuk sebuah beban satuan di A ,

$$M_C = R_D(c) = \left(-\frac{a}{L}\right)(c) = -\frac{ac}{L}$$

- 2) untuk sebuah beban satuan di B ,

$$M_C = 0$$

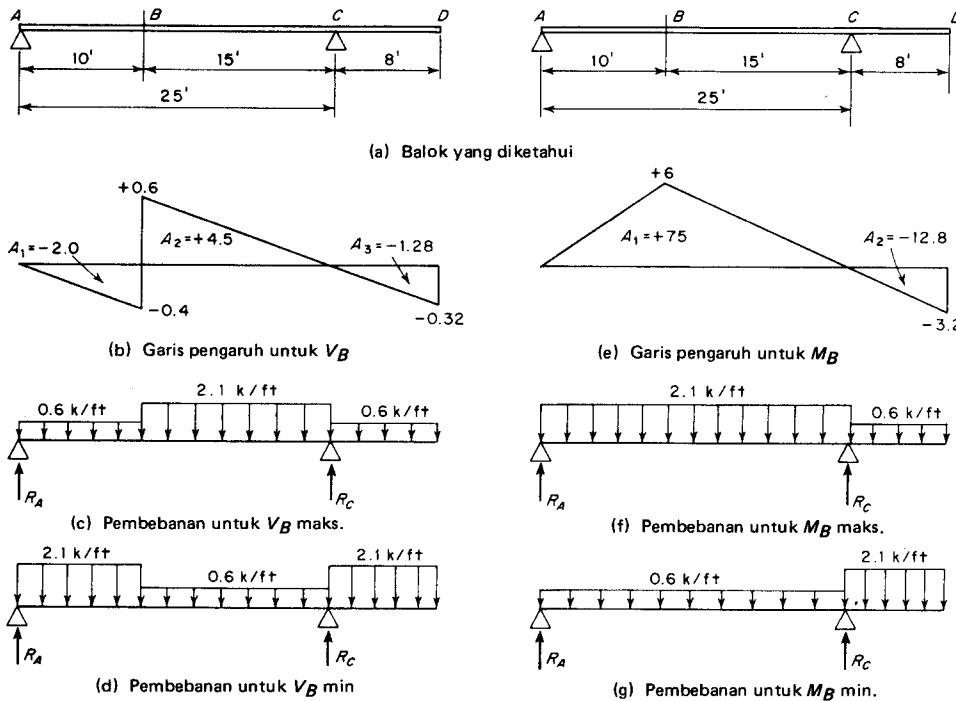
- 3) untuk sebuah beban satuan di C ,

$$M_C = R_B(b) = \left(\frac{c}{L}\right)(b) = +\frac{bc}{L}$$

- 4) untuk sebuah beban satuan di D ,

$$M_C = 0$$

Contoh Soal 9.2. Konstruksikan garis-garis pengaruh untuk gaya geser dan momen lentur pada penampang B dari balok konsol malar $ABCD$ yang diperlihatkan dalam Gambar 9.6a; hitung gaya geser dan momen-momen lentur maksimum dan minimum di B akibat dari beban mati sebesar 0,6 kip



GAMBAR 9.6. Gaya-gaya Geser dan Momen-momen Lentur Maksimum dan Minimum.

tiap ft dan sebuah beban hidup sebesar 1,5 kip tiap ft, dengan anggapan bahwa beban hidup boleh terpotong-potong dalam segmen-segmen dengan panjang sebarang.

Penyelesaian

(a) *Gaya-gaya geser maksimum dan minimum di B.* Garis pengaruh untuk V_B dikonstruksikan seperti diperlihatkan dalam Gambar 9.6b. Komponen luas-luas A_1 , A_2 dan A_3 adalah

$$A_1 = \frac{1}{2}(-0.4)(10) = -2.0$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(+0.6)(15) = +4.5$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(-0.32)(8) = -1.28$$

Pola pembebanan untuk gaya geser maksimum di B diperlihatkan dalam Gambar 9.6c; nilainya dapat diperoleh dengan mempergunakan Persamaan (9.2.2) sebagai

$$\begin{aligned} V_B \text{ maksimum} &= 0.6A_1 + 2.1A_2 + 0.6A_3 \\ &= 0.6(-2.0) + 2.1(+4.5) + 0.6(-1.28) \\ &= +7.482 \text{ kips} \end{aligned}$$

Nilai ini harus dicek dengan menghitung gaya geser di B dari balok dari Gambar 9.6c; atau

$$\begin{aligned} V_B \text{ maksimum} &= R_A - 0.6(10) = \frac{0.6(33)(8.5) + 1.5(15)(7.5)}{25} - 6 \\ &= 13.482 - 6 = +7.482 \text{ kips (cocok)} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, penerapan Persamaan (9.2.2) terhadap pola pembebanan dari Gambar 9.6d,

$$\begin{aligned} V_B \text{ minimum} &= 2.1A_1 + 0.6A_2 + 2.1A_3 \\ &= 2.1(-2.0) + 0.6(+4.5) + 2.1(-1.28) \\ &= -4.188 \text{ kips} \end{aligned}$$

Dengan menerapkan cara konvensional terhadap balok dari Gambar 9.6d,

$$\begin{aligned} V_B \text{ minimum} &= R_A - 2.1(10) = \frac{0.6(33)(8.5) + 1.5(10)(20) - 1.5(8)(4)}{25} - 21.0 \\ &= 16.812 - 21.0 = -4.188 \text{ kips (cocok)} \end{aligned}$$

(b) *Momen-momen lentur maksimum dan minimum di B.* Garis pengaruh untuk M_B dikonstruksikan seperti diperlihatkan dalam Gambar 9.6e; luas-luas komponen A_1 dan A_2 adalah

$$A_1 = \frac{1}{2}(+6)(25) = +75$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(-3.2)(8) = -12.8$$

Dengan menerapkan Persamaan (9.2.2) terhadap pola beban dari Gambar 9.6f,

$$\begin{aligned} M_B \text{ maksimum} &= 2.1A_1 + 0.6A_2 \\ &= 2.1(+75) + 0.6(-12.8) \\ &= +149.82 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

Pemeriksaan dengan menggunakan bagian lepas diperlihatkan oleh Gambar 9.6f,

$$\begin{aligned}
 M_B \text{ maksimum} &= R_A(10) - \frac{1}{2}(2.1)(10)^2 \\
 &= \left[\frac{0.6(33)(8.5) + 1.5(25)(12.5)}{25} \right](10) - 105 \\
 &= 25.482(10) - 105 = +149.82 \text{ ft-kips (cocok)}
 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan Persamaan (9.2.2) terhadap pola pembebanan dari Gambar 9.6g,

$$\begin{aligned}
 M_B \text{ minimum} &= 0.6A_1 + 2.1A_2 \\
 &= 0.6(+75) + 2.1(-12.8) \\
 &= +18.12 \text{ ft-kips}
 \end{aligned}$$

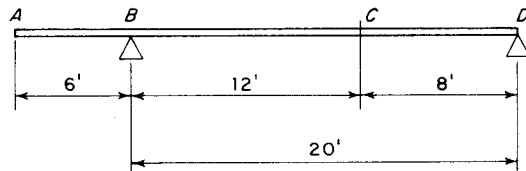
Pemeriksaan dengan menggunakan bagian lepas diperlihatkan oleh Gambar 9.6g,

$$\begin{aligned}
 R_B \text{ minimum} &= R_A(10) - \frac{1}{2}(0.6)(10)^2 \\
 &= \left[\frac{0.6(33)(8.5) - 1.5(8)(4)}{25} \right](10) - 30 \\
 &= 4.812(10) - 30 = +18.12 \text{ ft-kips (cocok)}
 \end{aligned}$$

Jika ada kebalikan tanda antara nilai-nilai maksimum dan minimum dari M_B dan bila balok terbuat dari beton bertulang, tulangan tarik disyaratkan pada bagian atas dan bawah dari penampang melintang di B .

LATIHAN 9.2

Dengan merujuk pada Gambar 9.7 konstruksikanlah garis-garis pengaruh untuk gaya geser dan momen lentur pada penampang C dari balok konsol malar $ABCD$, dan hitung gaya geser dan momen-momen lentur maksimum dan minimum di C akibat sebuah beban mati sebesar 0,8 kip tiap ft dan sebuah beban hidup sebesar 2 kips tiap ft dengan anggapan bahwa beban hidup boleh terpotong-potong dalam segmen-segmen dengan panjang sebarang.



GAMBAR 9.7. Latihan 9.2.

9.4 Momen Lentur Maksimum pada sebuah Penampang dari sebuah Balok Sederhana Akibat dari sebuah Rangkaian Panjang dari Beban-beban Terpusat yang Bergerak

Bila sebuah rangkaian panjang dari beban-beban terpusat melewati sebuah balok sederhana dari salah satu arah, kedudukan kritisnya dapat diperoleh dengan cara mencoba-coba dengan bantuan dari Persamaan (9.2.1), tetapi akan lebih seyogya bila dimungkinkan untuk menjabarkan suatu kriteria aljabar.

Pertama, dapat diperlihatkan bahwa garis pengaruh adalah sebuah segmen garis lurus, nilai dari sebuah fungsi akibat dari serombongan beban-beban roda adalah sama dengan hasil kali dari ordinat pengaruh di tempat gaya resultante G , dan nilai dari G itu sendiri. Dengan merujuk pada Gambar 9.8, dan berdasarkan definisi gaya resultante,

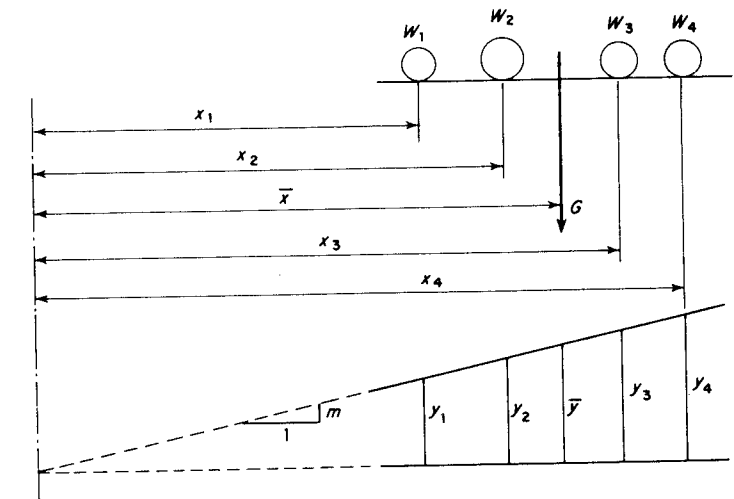
$$(9.4.1) \quad G\bar{x} = W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + W_4x_4$$

Dengan mengalikan tiap suku dalam Persamaan (9.4.1) dengan kelandaian m dari segmen garis pengaruh,

$$Gm\bar{x} = W_1mx_1 + W_2mx_2 + W_3mx_3 + W_4mx_4$$

dari mana

$$(9.4.2) \quad G\bar{y} = W_1y_1 + W_2y_2 + W_3y_3 + W_4y_4 = \Sigma Wy$$



GAMBAR 9.8. Ordinat Pengaruh di bawah sebuah Gaya Resultante.

Sekarang tinjaulah kedudukan awal dari roda Gambar 9.9 yang dimajukan sejauh Δx ke kiri. Perubahan momen lentur di C adalah

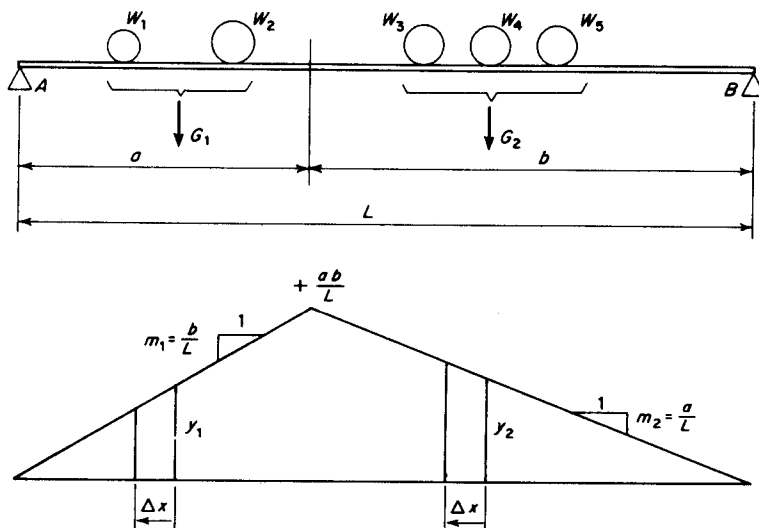
$$\begin{aligned}\Delta M_C &= G_1(-m_1\Delta x) + G_2(+m_2\Delta x) \\ &= -\frac{G_1b}{L}\Delta x + \frac{G_2a}{L}\Delta x \\ &= \left(\frac{Ga}{L} - G_1\right)\Delta x\end{aligned}$$

dari mana

$$(9.4.3) \quad \frac{dM_C}{dx} = \frac{Ga}{L} - G_1$$

Persamaan (9.4.3) adalah kriteria kedudukan beban untuk momen lentur maksimum pada sebuah penampang dari sebuah balok sederhana, disyaratkan bahwa ungkapan $(Ga/L - G_1)$ berubah dari positif menjadi negatif bila sebuah beban ditempatkan di C pertama dipandang di sebelah kanan dari C kemudian di sebelah kiri dari C .

Sekali kedudukan pembebanan kritis diperoleh, nilai momen lentur itu sendiri dapat dihitung baik dengan menggunakan Persamaan (9.2.1) maupun dengan menerapkan cara konvensional untuk beban-beban yang tidak bergerak.

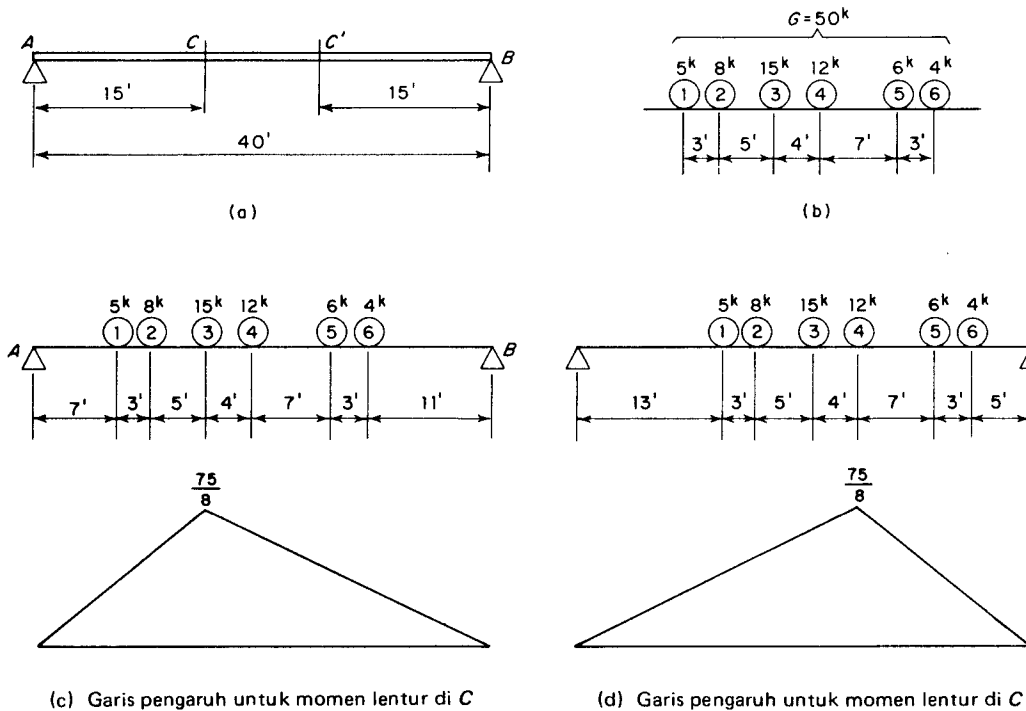


GAMBAR 9.9. Garis Pengaruh untuk Momen Lentur di C

Kriteria kedudukan, Persamaan (9.4.3), untuk serangkaian beban pada saat bergerak di atas bentang dari kiri ke kanan telah diperoleh. Untuk mendapatkan momen lentur maksimum pada sebuah penampang C akibat dari serangkaian beban yang bergerak dari kiri ke kanan, adalah hanya diperlukan untuk menentukan momen lentur maksimum pada sebuah penampang C' (simetris dengan penampang C terhadap garis tengah dari balok) akibat dari serangkaian beban yang bergerak dari kanan ke kiri. Dalam memakai cara ini kita tidak perlu menggambar sketsa lainnya untuk menunjukkan rangkaian beban dalam urutan yang terbalik.

Contoh Soal 9.3. Tentukan momen lentur maksimum pada sebuah penampang 15 ft dari penyangga sebelah kiri dari sebuah bentang 40 ft balok sederhana yang diperlihatkan dalam Gambar 9.10a, akibat dari serangkaian beban bergerak untuk kedua arah berupa enam beban terpusat yang diperlihatkan dalam Gambar 9.10b.

Penyelesaian. Kriteria kedudukan, Persamaan (9.4.3), mensyaratkan bahwa nilai dari ungkapan $(Ga/L - G_1)$ berubah dari positif menjadi nega-



(c) Garis pengaruh untuk momen lentur di C

(d) Garis pengaruh untuk momen lentur di C'

GAMBAR 9.10. Momen Lentur Maksimum pada sebuah Penampang dari sebuah Balok Sederhana.

tif bila sebuah beban roda yang ditempatkan di penampang tersebut pertama diikutsertakan dalam G_1 dan kemudian tidak diikutsertakan dalam G_1 . Hal ini menyatakan bahwa nilai dari Ga/L haruslah terletak antara nilai-nilai ekstrim dari G_1 . Seperti diperlihatkan oleh tabel:

Roda di C	G_1 di atas AC (tidak termasuk roda di C)	$\frac{Ga}{L} = \frac{G(15)}{40} = \frac{3}{8} G$	G_1 di atas AC (termasuk roda di C)	Apakah kriteria dipenuhi?
No. 2	5	18.75	13	Tidak
No. 3	13	18.75	28	Ya
No. 4	28	18.75	40	Tidak

kriteria untuk M_C maksimum dipenuhi dengan menempatkan roda No. 3 di C. Harus diperhatikan benar-benar bahwa tidak ada beban roda yang jatuh di luar bentang untuk masing-masing dari ketiga kedudukan yang diperlihatkan dalam tabel. Akan tetapi, bila hal tersebut terjadi, tiap himpunan nilai-nilai dari G_1 dan G haruslah konsisten dengan sendirinya. Dengan roda No. 3 di C, M_C maksimum dapat dihitung dengan menerapkan Persamaan (9.2.1) terhadap garis pengaruh dari Gambar 9.10 sebagai

$$\begin{aligned}
 M_C \text{ maks} &= 5\left(\frac{7}{15}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 8\left(\frac{10}{15}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 15\left(\frac{7.5}{8}\right) + 12\left(\frac{21}{25}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 6\left(\frac{14}{25}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 4\left(\frac{11}{25}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) \\
 &= 21.875 + 50.000 + 140.625 + 94.500 + 31.500 + 16.500 \\
 &= 355 \text{ ft-kips}
 \end{aligned}$$

Dengan cara konvensional untuk beban-beban tetap,

$$\begin{aligned}
 M_C \text{ maks.} &= R_A(15) - 5(8) - 8(5) \\
 &= \frac{4(11) + 6(14) + 12(21) + 15(25) + 8(30) + 5(33)}{40}(15) - 80 \\
 &= 29(15) - 80 = 355 \text{ ft-kips (cocok)}
 \end{aligned}$$

Untuk momen lentur maksimum pada sebuah penampang C' 15 ft dari penyangga kiri, kriteria kedudukan, Persamaan (9.4.3) dipenuhi dengan menempatkan roda No. 4 di C' , diperlihatkan dengan tabel berikut:

Roda di C'	G_1 di atas AC' (tidak termasuk roda di C')	$\frac{Ga}{L} = \frac{G(25)}{40} = \frac{5}{8} G$	G_1 di atas AC' termasuk roda di C'	Apakah kriteria dipenuhi?
No. 3	13	31.25	28	Tidak
No. 4	28	31.25	40	Ya
No. 5	40	31.25	46	Tidak

Dengan menerapkan Persamaan-persamaan (9.2.1) terhadap garis pengaruh dari Gambar 9.8d,

$$\begin{aligned}
 M_{C'} \text{ maks} &= 5\left(\frac{13}{25}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 8\left(\frac{16}{25}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 15\left(\frac{21}{25}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 12\left(\frac{7.5}{8}\right) + 6\left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) + 4\left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{7.5}{8}\right) \\
 &= 24.375 + 48.000 + 118.125 + 112.500 + 30.000 + 12.500 \\
 &= 345.5 \text{ ft-kips}
 \end{aligned}$$

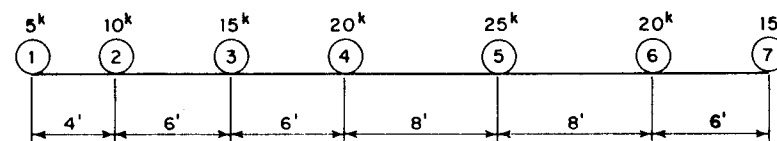
Dengan cara konvensional untuk beban-beban tetap,

$$\begin{aligned}
 M_{C'} \text{ maks.} &= R_A(25) - 5(12) - 8(9) - 15(4) \\
 &= \frac{4(5) + 6(8) + 12(15) + 15(19) + 8(24) + 5(27)}{40}(25) - 192 \\
 &= 21.5(25) - 192 = 345.5 \text{ ft-kips (cocok)}
 \end{aligned}$$

Jadi lentur maksimum di C adalah 355 ft-kips akibat serangkaian beban bergerak dari kanan ke kiri; momen lentur maksimum di C' adalah juga 355 ft-kips, tetapi ini adalah akibat serangkaian beban bergerak dari kiri ke kanan.

LATIHAN 9.3

Dengan merujuk ke Gambar 9.11 tentukan momen lentur maksimum pada sebuah penampang 20 ft dari penyangga sebelah kiri pada sebuah bentang balok sederhana 50 ft akibat serangkaian beban bergerak dari kedua belah arah yang terdiri dari tujuh beban-beban terpusat.



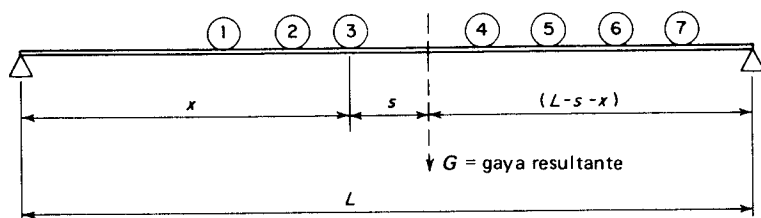
GAMBAR 9.11. Latihan 9.3.

9.5 Momen Lentur Maksimum Absolut dalam sebuah Balok Sederhana Akibat dari Rangkaian-Panjang Beban-beban Terpusat Bergerak

Dalam bab yang terdahulu, sebuah cara telah dipaparkan untuk mendapatkan momen lentur maksimum pada sebuah penampang yang dipilih dari balok sederhana akibat dari rangkaian-panjang dari beban-beban terpusat yang bergerak. Dapat difahami bahwa momen lentur maksimum yaitu yang ditentukan untuk sebuah penampang di tengah bentang akan sangat mendekati dengan momen lentur maksimum absolut yang dapat mungkin terjadi pada balok akibat serangkaian beban bergerak. Akan tetapi, dapat diperlihatkan, bahwa momen lentur maksimum absolut harus terjadi *pada sebuah beban roda* bila beban roda dan gaya resultante dari serangkaian beban tersebut bergerak sama dengan tengah-tengah balok.

Pandanglah persoalan untuk mendapatkan kedudukan dari roda No. 3 dalam Gambar 9.12 sehingga momen lentur di bawahnya adalah maksimum. Dari Gambar 9.12, momen tersebut adalah

$$(9.5.1) \quad M = \frac{G(L - s - x)}{L}x - (\text{momen dari roda-roda 1 dan 2 terhadap roda 3})$$



GAMBAR 9.12. Momen Lentur Maksimum Absolut pada sebuah Balok Sederhana.

Diferensiasi Persamaan (9.5.1) ke arah x ,

$$(9.5.2) \quad \frac{dM}{dx} = \frac{G}{L}(L - s - 2x)$$

Persamaan (9.5.2) dinolkan,

$$(9.5.3) \quad x = \frac{L - s}{2}$$

selanjutnya menjadi

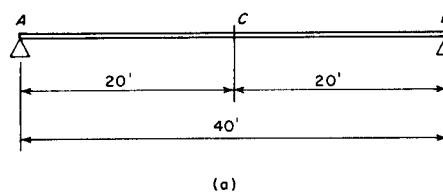
$$(9.5.4) \quad (L - s - x) = \frac{L - s}{2}$$

Persamaan-persamaan (9.5.3) dan (9.5.4) menunjukkan bahwa roda No. 3 dan gaya resultante G harus berjarak sama dengan tengah-tengah balok.

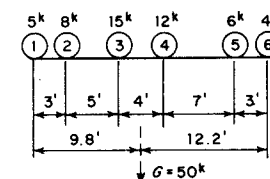
Untuk menentukan momen lentur maksimum absolut pada sebuah balok sederhana akibat dari serangkaian beban-beban terpusat bergerak, momen lentur maksimum di tengah-tengah balok tersebut harus ditentukan lebih dulu. Kemudian momen lentur maksimum absolut harus terjadi di *bawah roda* yang diletakkan di tengah-tengah bentang untuk menghasilkan momen lentur maksimum di situ. Tentu saja, roda dan gaya resultante ini haruslah mengambil kedudukan seperti di definisikan oleh Persamaan-persamaan (9.5.3) atau (9.5.4).

Contoh Soal 9.4. Tentukan momen lentur maksimum di tengah-tengah balok sederhana 40 ft yang diperlihatkan dalam Gambar 9.13a, juga momen lentur maksimum absolut pada balok akibat enam rangkaian beban terpusat yang diperlihatkan dalam Gambar 9.13b.

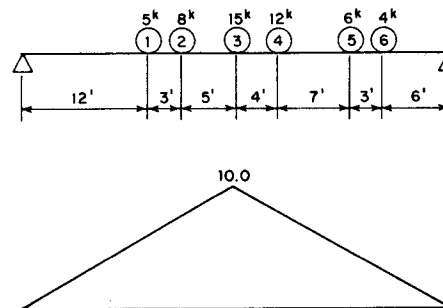
Penyelesaian. Untuk momen lentur maksimum di tengah-tengah bentang, kriteria kedudukan, Persamaan (9.4.3), dipenuhi dengan menempatkan



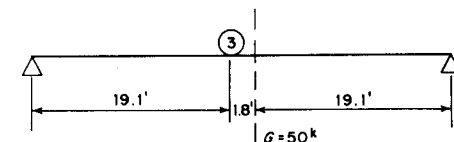
(a)



(b)



(c) Garis pengaruh untuk momen pada tengah-tengah bentang



(d) Kedudukan beban untuk momen lentur maksimum absolut

GAMBAR 9.13. Momen Lentur Maksimum Absolut pada sebuah Balok Sederhana.

kan roda No. 3 di tengah-tengah bentang seperti diperlihatkan oleh tabel berikut ini:

Roda di C	G_1 di atas AC (tidak termasuk roda di C)	$\frac{Ga}{L} = \frac{1}{2}G$	G_1 di atas AC (termasuk roda di C)	Apakah kriteria dipenuhi?
No. 2	5	25	13	Tidak
No. 3	13	25	28	Ya
No. 4	28	25	40	Tidak

Dengan menerapkan Persamaan (9.2.1) pada garis pengaruh dari Gambar 9.13c,

$$\begin{aligned} M_C \text{ maks.} &= 5\left(\frac{12}{20}\right)(10) + 8\left(\frac{15}{20}\right)(10) + 15(10) + 12\left(\frac{18}{20}\right)(10) \\ &\quad + 6\left(\frac{9}{20}\right)(10) + 4\left(\frac{6}{20}\right)(10) \\ &= 30 + 60 + 150 + 96 + 27 + 12 = 375 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

Dengan cara konvensional untuk beban-beban tetap,

$$\begin{aligned} M_C \text{ maks.} &= R_A(20) - 5(8) - 8(5) \\ &= \frac{4(6) + 6(9) + 12(16) + 15(20) + 8(25) + 5(28)}{40}(20) - 80 \\ &= 455 - 80 = 375 \text{ ft-kips (cocok)} \end{aligned}$$

Dari Gambar 9.13b, resultante G berjarak

$$\frac{6(3) + 12(10) + 15(14) + 8(19) + 5(22)}{50} = 12.2 \text{ ft}$$

dari roda No. 6. Jarak s antara roda No. 3 dan $G = 50$ kips adalah 1,8 ft, jadi

$$\frac{L - s}{2} = \frac{40 - 1.8}{2} = 19.1 \text{ ft}$$

Dari Gambar 9.13d, momen lentur maksimum absolut pada roda No. 3 adalah

$$\begin{aligned} \text{Momen Maks. Absolut} &= \frac{50(19.1)^2}{40} - 8(5) - 5(8) \\ &= 456.0125 - 80 = 376.0125 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

Perlu dicatat bahwa momen lentur maksimum absolut sebesar 376,0125 ft-kips adalah sedikit lebih besar dari momen lentur maksimum sebesar 375 ft-kip di tengah-tengah bentang.

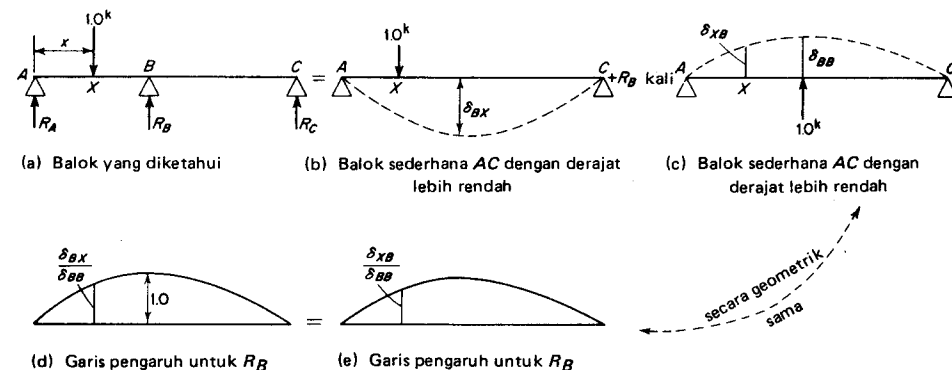
LATIHAN 9.4

Tentukan momen lentur maksimum di tengah-tengah sebuah sederhana 50 ft, juga momen lentur maksimum absolut pada balok akibat tujuh rangkaian beban terpusat yang diperlihatkan dalam Latihan 9.3 (Gambar 9.11).

9.6 Garis Pengaruh untuk Reaksi-reaksi pada Balok-balok Statik Tidak Tertentu.

Garis-garis pengaruh untuk struktur-struktur statik tidak tertentu, yang berbeda dengan struktur-struktur statik tertentu, tidak terdiri dari segmen-segmen lurus, karena nilai dari fungsi tidaklah mudah untuk diperoleh berdasarkan hukum statika sebagai sebuah variasi linear sehubungan dengan kedudukan sepanjang bentang dari beban terpusat tunggal yang bergerak. Adalah perlu untuk menurunkan sebuah persamaan dari tiap segmen malar dengan cara analisis struktur statik-tidak tertentu sebarang yang mudah, atau menghitung ordinat-ordinat pengaruh untuk sebanyak-banyaknya titik-titik sepanjang bentang yang perlu untuk menghasilkan sebuah kurva pengaruh yang mulus.

Sebagai sebuah gambaran yang khas, garis pengaruh untuk R_B untuk balok malar dua-bentang dari Gambar 9.14a diperlihatkan dalam Gambar 9.14d. Dengan analisis cara gaya, untuk sebuah beban tunggal terpusat yang



GAMBAR 9.14. Garis Pengaruh untuk Reaksi pada sebuah Balok Malar Dua-Bentang.

diterapkan pada suatu jarak x dari penyangga sebelah kiri, persamaan kesepadanan dapat diamati dari Gambar 9.11a, b dan c sebagai

$$\delta_{BX} = R_B \delta_{BB}$$

dari mana

$$(9.6.1) \quad R_B = \frac{\delta_{BX}}{\delta_{BB}}$$

Ordinat pengaruh ini yang diperoleh dari Persamaan (9.6.1) digambarkan di bawah beban terpusat tunggal pada garis pengaruh untuk R_B dalam Gambar 9.14d. Akan tetapi berdasarkan Hukum Lendutan Kebalikan yang pertama kali diperbincangkan dalam Contoh 7.4 dan kemudian dibuktikan secara umum dalam Pasal 8.6,

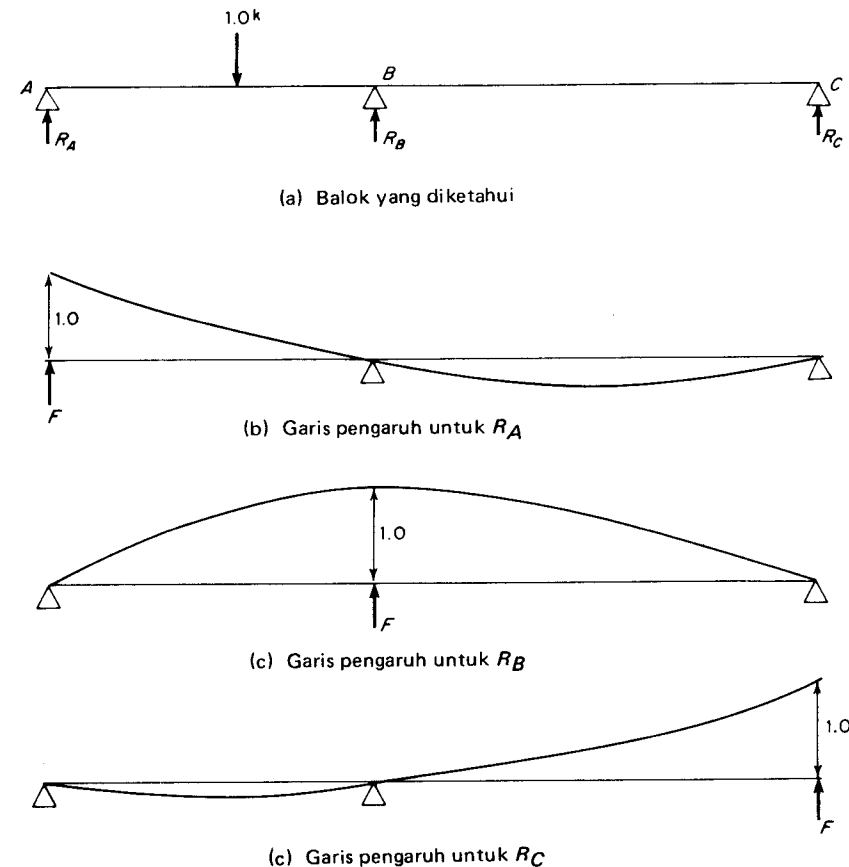
$$(9.6.2) \quad \delta_{BX} = \delta_{XB}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (9.6.2) ke dalam Persamaan (9.6.1) memberikan ordinat pengaruh untuk R_B sebagai

$$(9.6.3) \quad R_B = \frac{\delta_{XB}}{\delta_{BB}}$$

yang diperlihatkan dalam Gambar 9.14e. Dengan membandingkan Gambar 9.14e dengan Gambar 9.14c menunjukkan bahwa gambar-gambar tersebut secara geometris adalah sama kecuali bahwa semua ordinat-ordinat pada kurva elastik dari Gambar 9.14c dibagi dengan besaran δ_{BB} supaya menghasilkan ordinat-ordinat pada garis pengaruh dari Gambar 9.14e.

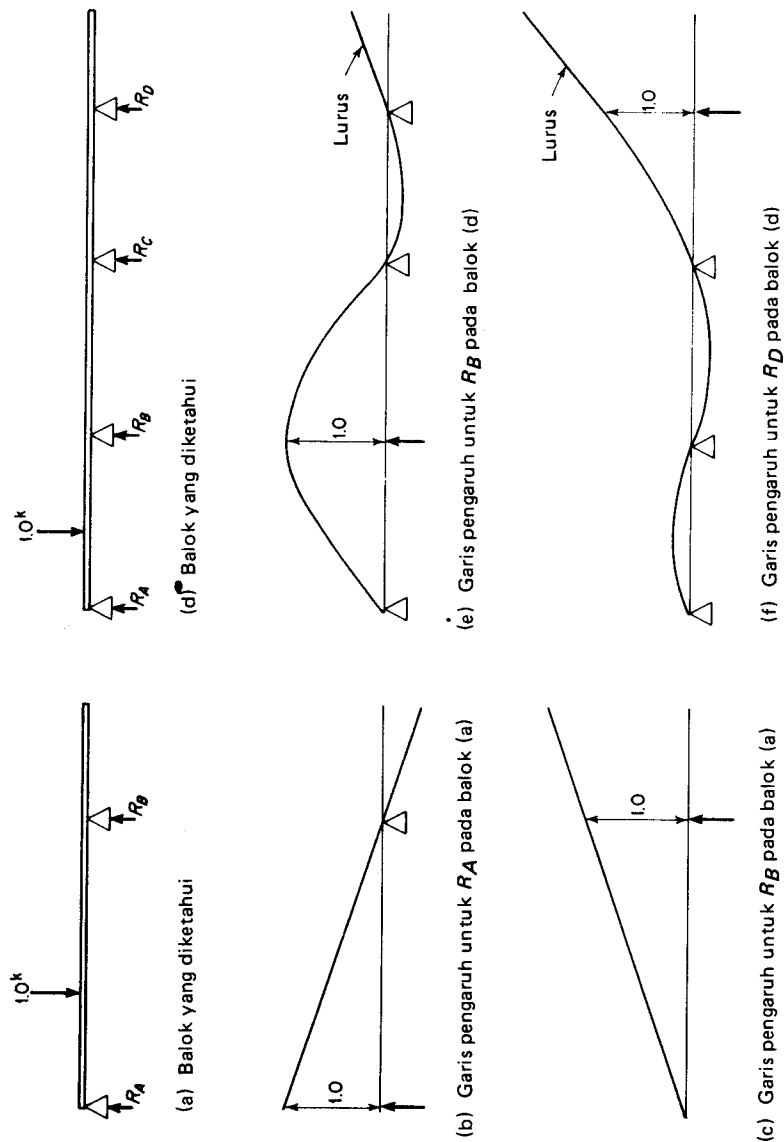
Dari pembahasan yang lalu dapat diamati bahwa garis pengaruh untuk sebuah reaksi pada sebuah balok dapat diperoleh: 1) dengan menghapuskan penyangga untuk reaksi tersebut; dan 2) dengan menerapkan sebarang gaya dalam arah reaksi tersebut untuk memperoleh sebuah lendutan satuan. Dalam Gambar 9.15, garis pengaruh untuk R_A diperoleh dengan menerapkan sebarang gaya di A pada balok konsol dengan penyangga-penyangga di B dan C ; untuk R_B , sebuah gaya sebarang di B diterapkan pada balok sederhana dengan penyangga-penyangga di A dan C ; dan untuk R_C , sebuah gaya sebarang di C diterapkan pada balok konsol malar dengan penyangga-penyangga di A dan B . Dalam kenyataannya konsep yang sama dapat diterapkan dengan keberhasilan yang sama terhadap balok statik tertentu dari Gambar 9.16a, atau terhadap balok tidak tertentu dari Gambar 9.16 yang mempunyai derajat ketidaktertentuan lebih dari satu. Sebuah prinsip yang masih bersifat lebih umum yang dapat diterapkan terhadap garis-garis pengaruh



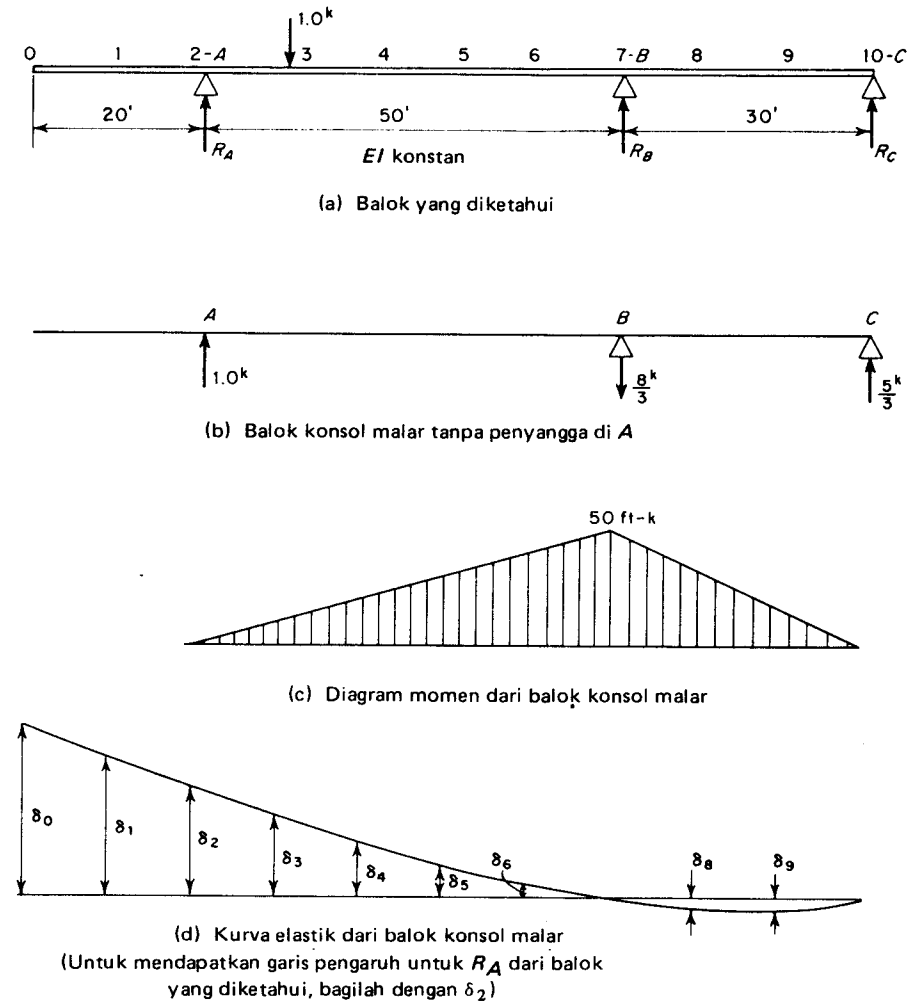
GAMBAR 9.15. Kurva-kurva Elastik dibanding Garis-garis Pengaruh.

dari sebarang fungsi (reaksi, gaya geser, momen lentur statik tertentu atau statik tidak tertentu dari kerangka-kerangka kaku, atau gaya-gaya aksial dalam kuda-kuda statik tertentu atau statik tidak tertentu, atau tiap gaya internal lain dalam tiap sebarang jenis struktur-struktur yang kompleks) akan disebut pada bagian selanjutnya.

Contoh Soal 9.5. Konstruksikan garis pengaruh untuk reaksi R_A pada balok statik tidak tertentu dari Gambar 9.17a dengan menghitung ordinat-ordinat pengaruh pada interval-interval sejarak 10-ft, dengan catatan bahwa ordinat-ordinat pengaruh ini adalah lendutan-lendutan pada kurva elastik yang diperoleh dengan menerapkan sebarang gaya di A terhadap balok konsol malar dengan penyangga-penyangga di B dan C untuk menghasilkan sebuah lendutan satuan di A .



GAMBAR 9.16. Garis-garis Pengaruh dibandingkan Diagram-diagram Perpindahan.



GAMBAR 9.17. Garis Pengaruh untuk Reaksi di A.

Penyelesaian. Akibat dari aksi sebuah gaya sebarang 1 kip di A, reaksi-reaksi, diagram momen, kurva elastik dari konsol malar dengan penyangga-penyangga di B dan C diperlihatkan dalam Gambar 9.17b, c, dan d. Dengan menerapkan Teorema Balok Terpadu I terhadap kurva elastik antara B dan C,

$$EI\theta_B = \frac{2}{3}(\text{luas-M di atas BC}) = \frac{2}{3}(750) = 500 \text{ k-ft}^2 \text{ searah jarum jam}$$

$$EI\theta_C = \frac{1}{3}(\text{luas-M di atas BC}) = \frac{1}{3}(750) = 250 \text{ k-ft}^2 \text{ berlawanan arah jarum jam}$$

Dengan menerapkan Teorema Balok-konjugat II terhadap kurva elastik antara B dan C ,

$$EI\delta_9 = (EI\theta_C)(10) - (\text{momen dari luas-}M \text{ di atas } 9-C \text{ terhadap } 9) \\ = 250(10) - \frac{1}{2}\left(\frac{50}{3}\right)(10)\left(\frac{10}{3}\right) = 2222 \text{ k-ft}^3 \text{ ke bawah}$$

$$EI\delta_8 = (EI\theta_C)(20) - (\text{momen dari luas-}M \text{ di atas } 8-C \text{ terhadap } 8) \\ = 250(20) - \frac{1}{2}\left(\frac{100}{3}\right)(20)\left(\frac{20}{3}\right) = 2778 \text{ k-ft}^3 \text{ ke bawah}$$

Dengan menerapkan Teorema Luas-Momen II terhadap kurva elastik antara titik-titik 6 dan B ,

$$EI\delta_6 = 10(EI\theta_B) + (\text{momen dari luas-}M \text{ di atas } 6-B \text{ terhadap } 6) \\ = 10(500) + \frac{1}{2}(50)(10)\left(\frac{20}{3}\right) + \frac{1}{2}(40)(10)\left(\frac{10}{3}\right) \\ = 7333 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

Sama halnya,

$$EI\delta_5 = 18667 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

$$EI\delta_4 = 33000 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

$$EI\delta_3 = 49333 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

$$EI\delta_2 = 66667 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

Dengan menerapkan Teorema Luas-Momen I antara A dan B ,

$$EI\theta_A = EI\theta_B + (\text{Luas-}M \text{ di atas } AB) \\ = 500 + \frac{1}{2}(50)(50) = 1750 \text{ k-ft}^2 \text{ searah jarum jam}$$

Dari Gambar 9.17d,

$$EI\delta_1 = EI\delta_2 + 10(EI\theta_A) = 66667 + 10(1750) \\ = 84167 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

$$EI\delta_0 = EI\delta_2 + 20(EI\theta_A) = 66667 + 20(1750) \\ = 101667 \text{ k-ft}^3 \text{ ke atas}$$

Ordinat-ordinat pengaruh pada titik-titik 0 sampai 10 diperoleh dengan membagi δ_0 sampai δ_{10} dengan nilai dari $\delta_2 = 6667 \text{ k-ft}^3$; hasilnya adalah

$$\begin{array}{llll} y_0 = +1.5250 & y_1 = +1.2625 & y_2 = +1.0000 & y_3 = +0.7400 \\ y_4 = +0.4950 & y_5 = +0.2800 & y_6 = +0.1100 & y_7 = 0. \\ y_8 = -0.0417 & y_9 = -0.0333 & y_{10} = 0. \end{array}$$

LATIHAN 9.5

Konstruksikan garis pengaruh untuk reaksi R_B pada balok statik tidak tertentu dari Contoh 9.5 dengan menghitung ordinat-ordinat pengaruh pada jarak-jarak 10-ft tanpa menggunakan jawaban dari Contoh 9.5 maupun Latihan 9.6.

LATIHAN 9.6

Konstruksikan garis pengaruh untuk reaksi R_C pada balok statik tidak tertentu dari Contoh 9.5 dengan menghitung ordinat-ordinat pengaruh pada jarak-jarak antara 10-ft tanpa menggunakan jawaban baik dari Contoh 9.5 maupun Latihan 9.5.

9.7 Teorema Pengaruh Muller-Breslau

Teorema Pengaruh Muller-Breslau* dapat dinyatakan sebagai berikut: Nilai dari sebuah fungsi akibat dari sebuah beban satuan terpusat tunggal adalah sama dengan lendutan dengan arah berlawanan dengan beban tunggal tersebut pada lokasi dari beban, bila sebarang gaya atau sepasang gaya-gaya diterapkan pada lokasi dari fungsi pada sebuah struktur dengan derajat lebih rendah, yang diperoleh dengan menghilangkan perlawanan yang diberikan oleh fungsi untuk menghasilkan sebuah satuan lendutan dalam arah dari fungsi." Pernyataan ini kelihatannya panjang, tetapi bila diterapkan terhadap keenam kejadian yang diperlihatkan dalam Gambar 9.18 dan 9.19, teoremnya adalah sederhana

$$(9.7.1) \quad X = Y$$

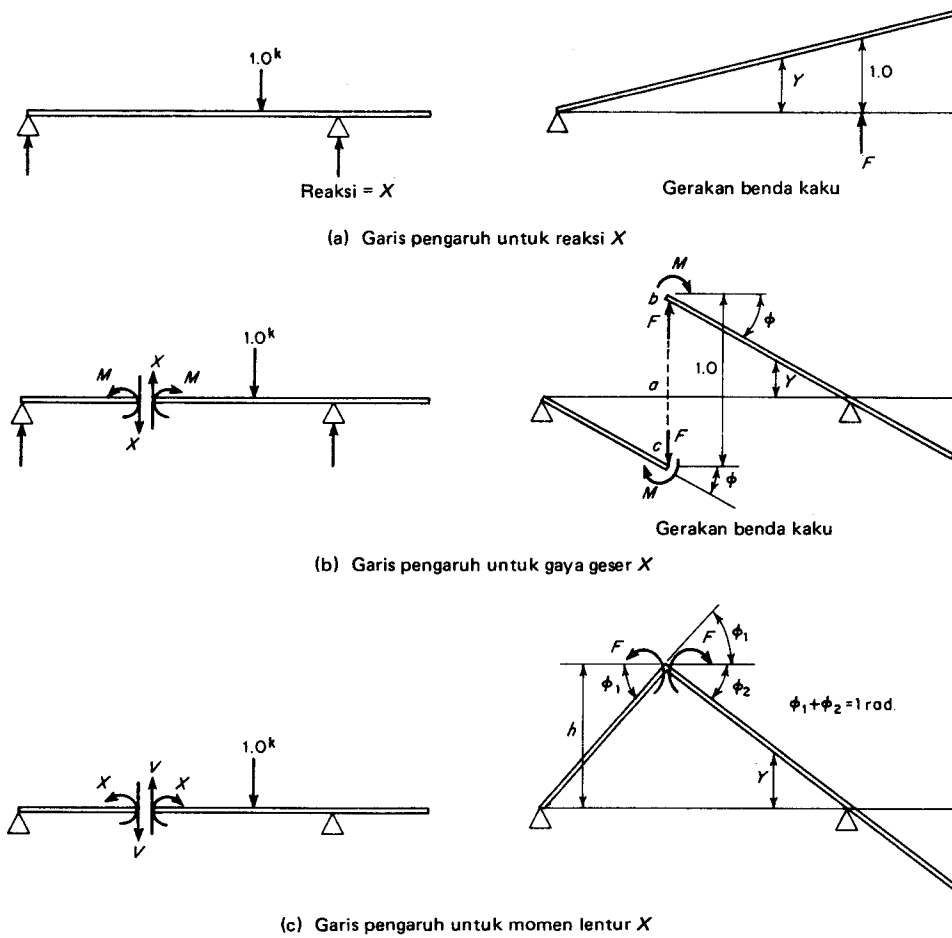
Untuk struktur-struktur statik tertentu, bukti untuk Persamaan (9.7.1) dapat dipengaruhi oleh penalaran bahwa pekerjaan yang dikerjakan oleh sebuah gaya resultante nol yang bekerja pada benda kaku yang berjalan lewat sebuah gerakan benda kaku dari benda tersebut haruslah sama dengan nol.

Dalam Gambar 9.18a, kedua reaksi dan beban satuan adalah dalam kesetimbangan; kerja yang dilakukan oleh ketiganya berjalan lewat sebuah gerakan benda kaku dari seluruh balok adalah

$$0 = -(1.0 \text{ kip})(Y \text{ in.}) + (X \text{ kips})(1.0 \text{ in.})$$

Dalam Gambar 9.18b, ada dua himpunan gaya-gaya dalam kesetimbangan dan dua gerakan benda kaku; kerja yang dilakukan oleh himpunan pertama adalah

* *History of Strength of Materials*, oleh S. Timoshenko, McGraw-Hill Book Co., 1953, hal. 310.



GAMBAR 9.18. Teorema Muller-Breslau yang Diterapkan pada Balok-balok Statik Tidak Tertentu.

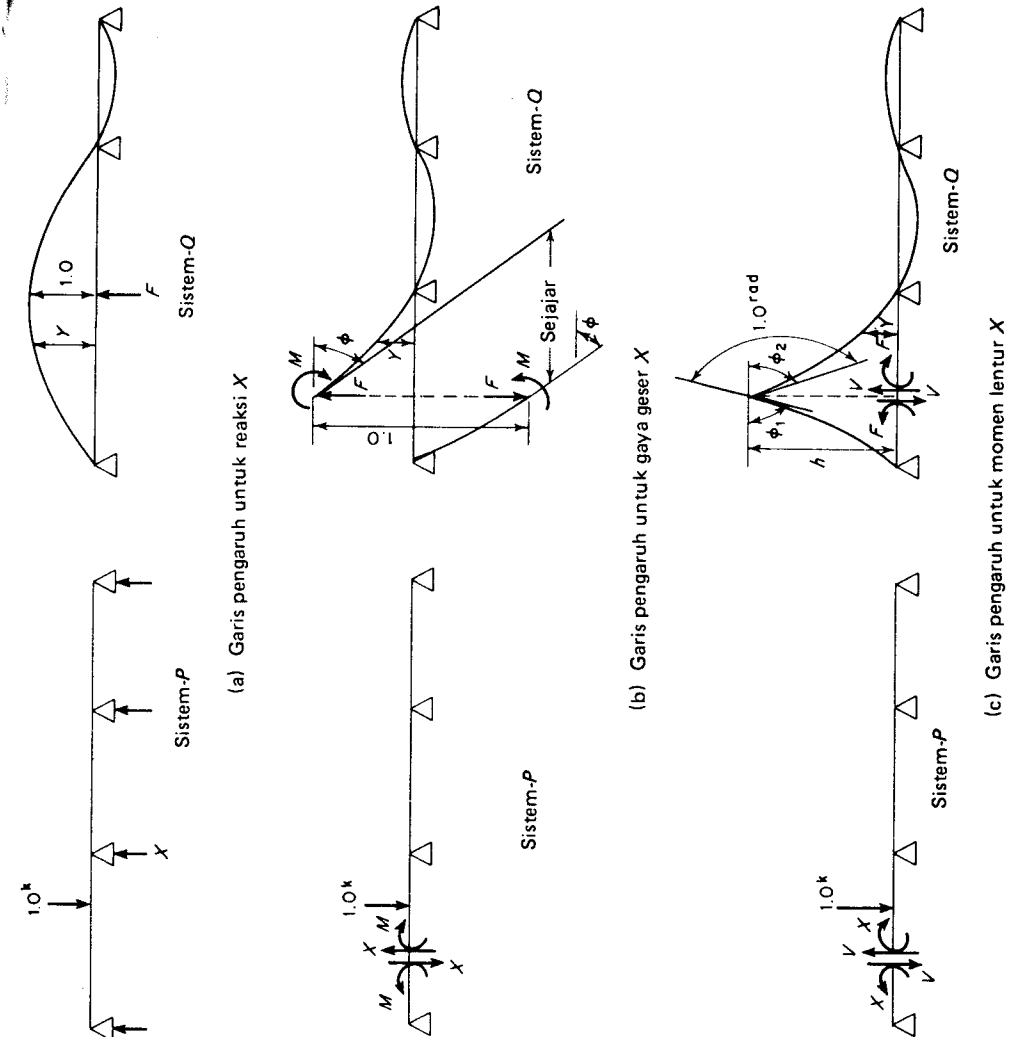
$$0 = +(X)(ac) - (M)(\phi)$$

dan kerja yang dilakukan oleh himpunan kedua adalah

$$0 = +(X)(ab) + (M)(\phi) - (1.0)(Y)$$

Jumlah dari kerja-kerja yang dilakukan kedua himpunan tersebut adalah tetap nol; atau

$$0 = +X(ab + ac) - (1.0)(Y) = +(X)(1.0) - (1.0)(Y)$$



GAMBAR 9.19. Teorema Pengaruh Muller-Breslau yang Diterapkan pada Balok Statik Tertentu.

Perhatikan bahwa kedua benda kaku adalah sejajar karena masih ada kemalaran dalam kelandaian yang dilakukan oleh pertahanan momen pada penampang tersebut.

Dalam Gambar 9.18c, ada lagi dua pasangan gaya dalam kesetimbangan dan dua gerakan benda kaku; kerja yang dilakukan oleh himpunan pertama adalah

$$0 = +(X)(\phi_1) - (V)(h)$$

dan kerja yang dilakukan oleh himpunan kedua adalah

$$0 = +(X)(\phi_2) + (V_1)(h) - (1.0)(Y)$$

Jumlah kerja yang dilakukan oleh kedua himpunan tersebut adalah tetap nol, atau

$$0 = +(X)(\phi_1 + \phi_2) - (1.0)(Y) = +(X)(1.0) - (1.0)(Y)$$

Untuk struktur-struktur statik tidak tertentu, bukti untuk Persamaan (9.7.1) dapat dibuat dengan menerapkan Teorema Energi Kebalikan yang dinyatakan dalam Pasal 8.6: kerja yang dilakukan oleh sebuah sistem gaya- P , dalam menjalani perpindahan-perpindahan dari sebuah sistem gaya- Q , adalah sama dengan kerja yang dilakukan oleh sistem gaya- Q dalam menjalani perpindahan-perpindahan dari sistem gaya- P . Dalam menerapkan teorema kebalikan pada Gambar 9.19, kita harus selalu ingat bahwa baik sistem gaya- P maupun sistem gaya- Q diterapkan terhadap struktur dengan derajat lebih rendah tanpa penahanan fisik sehubungan dengan fungsi khas.

Dalam Gambar 9.19a,

$$P * \Delta Q = -(1.0)(Y) + (X)(1.0)$$

tetapi,

$$Q * \Delta P = 0$$

karena tidak ada perpindahan dalam sistem- P untuk sebarang gaya F dalam sistem- Q .

Dalam Gambar 9.19b,

$$\begin{aligned} P * \Delta Q &= -(M)(\phi) + (M)(\phi) + (X)(ab) + X(ac) - (1.0)(Y) \\ &= +(X)(1.0) - (1.0)(Y) \end{aligned}$$

tetapi,

$$Q * \Delta P = 0$$

karena ada kemalaran baik pada kelandaian maupun lendutan pada penampang yang dipandang dalam sistem- P .

Dalam Gambar 9.19c,

$$\begin{aligned} P * \Delta Q &= -(V)(h) + (V)(h) + (X)(\phi_1) + (X)(\phi_2) - (1.0)(Y) \\ &= +(X)(1.0) - (1.0)(Y) \end{aligned}$$

tetapi,

$$Q * \Delta P = 0$$

sekali lagi karena ada kemalaran baik dalam kelandaian maupun lendutan pada penampang yang dipandang dalam sistem- P .

Teorema Pengaruh Muller-Breslau berguna untuk membuat sketsa dengan tangan dari garis-garis pengaruh dalam suatu cara kualitatif, dan dalam garis-garis pengaruh kuantitatif yang betul-betul menghasilkan dengan menggunakan model-model dalam laboratorium.

9.8 Catatan Penutup

Pokok persoalan dari garis-garis pengaruh adalah sesuatu yang mendalam, dan penanganannya dalam bab ini dibatasi pada beberapa konsep dasar. Pada saat jembatan-jembatan kerangka atau balok dibangun sepanjang jalan kereta api untuk menampung lalu lintas lokomotif dobel untuk kedua arah, akan dijumpai persoalan-persoalan analisis yang menarik. Karena jumlah beban roda terpusat yang lebih kecil, kedudukan-kedudukan pembebanan kritis biasanya dapat ditentukan dengan pengamatan sekilas, sehingga mengurangi kebutuhan penurunan bagi banyak kriteria aljabar dalam situasi-situasi yang berbeda-beda. Dalam kejadian struktur-struktur statik tidak tertentu, selama garis-garis pengaruhnya terdiri dari segmen-segmen kurva, kedudukan kritis dari serangkaian beban terpusat harus ditentukan dengan jalan coba-coba.

PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS PADJARAN
 Jl. Sekeloa Selatan 1
 40132 Bandung