

ادارة الخليفة والمقطع التعليمي

منتدى توجيه الرياضيات

الرياضيات الميكانيكا

الصف الثاني الثانوي

ثانياً الديناميكا

تقديم

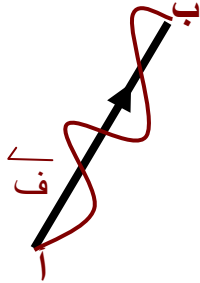
ادوار
عادل / P

ش $\frac{2}{3}$ ح
U
L
D
 ∞
C
+
D
ش

تعريف

متجه الإزاحة \vec{f} :

هو : المتجه الذي تمثله قطعة مستقيمة موجهة نقطة بدايتها الموضع الابتدائي للجسيم و نقطة نهايتها الموضع النهائي له



في الشكل المقابل : \vec{AB} يمثل متجه الإزاحة \vec{f}
حيث : أ الموضع الابتدائي للجسيم ، ب الموضع النهائي له

ملاحظات :

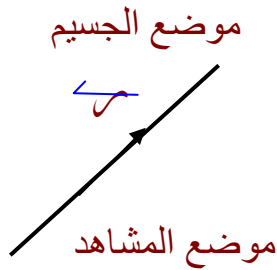
• متجه الإزاحة يرتبط بالموضعين الابتدائي و النهائي للجسيم و لا يتوقف على شكل

المسار الفعلي للجسيم أثناء الإزاحة

* معيار متجه الإزاحة \vec{AB} يساوي طول \vec{AB} و لا يساوي بالضرورة المسافة التي قطعها

الجسيم أثناء إنتقاله من أ إلى ب

متجه الموضع لجسيم \vec{r} :



هو : المتجه الذي تنطبق نقطة بدايته مع موضع المشاهد

و نقطة نهايته مع موضع الجسيم

العلاقة بين متجه الموضع و متجه الإزاحة :

متجه إزاحة جسيم بين لحظتين متتاليتين يساوي التغير في

متجه موضع الجسيم بين هاتين اللحظتين

في الشكل المقابل :

إذا كان " و " موضع المشاهد ، أ ، ب موضعي الجسيم عند لحظتين

متتاليتين t_1 ، t_2 على الترتيب فإن :

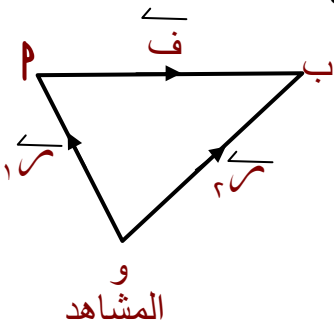
\vec{AB} هو متجه الإزاحة و ليكن \vec{f}

، و \vec{r}_1 هو متجه الموضع للجسيم عند اللحظة t_1 و ليكن \vec{r}_1

، و \vec{r}_2 هو متجه الموضع للجسيم عند اللحظة t_2 و ليكن \vec{r}_2

∴ $\vec{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ و بالتالي يكون :

$\vec{f} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



و
المشاهد

أعداد / عاقل إدوار



منذى توجيه الرياضيات

متجه سرعة جسيم :

هو : المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة و ينطبق إتجاهه على إتجاه الحركة

الحركة المنتظمة :

يتحرك جسيم حركة منتظمة إذا كان متجه سرعته ثابت معياراً و إتجاهاً لجميع الأزمنة

ملاحظات :

* إذا تحرك الجسيم حركة منتظمة فإنه يتحرك فى إتجاه ثابت أى أنه يتحرك فى خط مستقيم ثابت

* إذا تحرك الجسيم حركة منتظمة فإن معيار متجه السرعة يكون ثابتاً فى إتجاه حركته مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية

العلاقة بين متجهى الإزاحة و السرعة فى الحركة المنتظمة :

إذا استغرقت الإزاحة \overline{f} زمناً قدره " ن " و كان $\overline{v} = \frac{\overline{f}}{n}$ متجه ثابت المقدار و الإتجاه معاً فإن : الحركة تكون منتظمة و الجسيم يتحرك بسرعة منتظمة \overline{v} و يكون :

$$\overline{v} = \frac{\overline{f}}{n} \quad \text{أى أن :} \quad \overline{f} = n \times \overline{v}$$

القياس الجبرى لمتجهى الإزاحة و السرعة :

يفرض أن : \overline{f} ، \overline{v} هما معيارا متجهى الإزاحة و السرعة

، \overline{v} متجه وحدة موازى لإتجاه الحركة

فإن : $\overline{f} = n (\overline{v})$ أى أن : $\overline{f} = n \times \overline{v}$

وحدات قياس السرعة :

وحدة قياس معيار السرعة = وحدة قياس طول ÷ وحدة قياس زمن

" الكيلومتر فى الساعة (كم / س) ، المتر فى الثانية (م / ث)

، السنتيمتر فى الثانية (سم / ث) "

$$* \quad 1 \text{ كم / س} = \frac{1000}{3600} \text{ م / ث} = \frac{5}{18} \text{ (متر / ثانية)}$$

$$* \quad 1 \text{ كم / س} = \frac{250}{9} \text{ سم / ث} = \frac{250}{9} \text{ (سنتيمتر / ثانية)}$$

إدوار عادل

أعداد



منذى توجيه الرياضيات

هو خارج قسمة متجه الإزاحة في فترة زمنية ما على مقدار هذه الفترة الزمنية
فإذا تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين t_1 ، t_2 عند موضعين متتالين على الترتيب
وكان \vec{f} هو متجه الإزاحة التي طرأت على الجسيم في الفترة $(t_2 - t_1)$ فإن :

$$\frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{\sqrt{1} - \sqrt{0}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \sqrt{1}$$

متجه السرعة اللحظية :

إذا كانت الفترة الزمنية ($n_2 - n_1$) صغيرة جداً و متوسطها اللحظة n فإن متجه السرعة في هذه الحالة يعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة n

مثال ١ : قطعت سيارة مسافة ٥٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ٢٥ كم / س ثم قطعت مسافة ٤٥ كم بسرعة ١٥ كم / س أوجد متجه سرعتها المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :

أولاً : الإزاحتين في اتجاه واحد ثانياً : الإزاحتين في اتجاهين متضادين

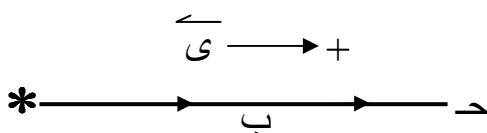
الحل

بفرض \overrightarrow{u} متجه وحدة في نفس اتجاه حركة السيارة عند قطع المسافة الأولى

$$\text{زمن قطع المسافة الأولى} = \frac{45}{15} = 3 \text{ ساعات}$$

$$\text{، زمن قطع المسافة الثانية} = \frac{50}{25} = 2 \text{ ساعات}$$

∴ زمن قطع الرحلة كلها = ٥ ساعات



أولاً : الإزاحتين في إتجاه واحد

متجه الإزاحة الكلية = $\vec{r}_{50} + \vec{r}_{40} = \vec{r}_{90}$

متجه السرعة المتوسطة = $\vec{G_m}$ = $\frac{95}{5}$ = 19 م/ث

أى أن : متجه السرعة المتوسطة له \vec{v} و معياره $= 19 \text{ كم / س}$

ثانياً : الإزاحتين في اتجاهين متضادين

$\overline{e} = \overline{e} - \overline{e}_0 =$ متجه الإزاحة الكلية

∴ متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$

أى أن : متجه السرعة المتوسطة له \overline{v} و معياره $v = 1 \text{ كم / س}$

مثال ٢: راكب دراجة يتحرك في خط مستقيم بسرعة منتظمة قدرها ١٥ كم / س ، و راكب سيارة يتحرك في نفس الخط بسرعة منتظمة ٣٠ كم / س فإذا كان البعد بينهما ٩٠ كم اوجد متى و أين يلتقيان إذا كانا : أولاً : يسيران في اتجاه واحد

الحل

بفرض \vec{v} متجه وحدة في نفس اتجاه حركة السيارة ،
السيارة تلاقى الدراجة بعد مضي n من بدء حركتها ،
، $\vec{v}_1 = 30$ " متجه إزاحة السيارة " n $\vec{v}_2 = 15$ " متجه إزاحة الدراجة " n $\vec{v}_3 = 90$ ،

أولاً : يسيران في اتجاه واحد

سرعة السيارة = 30 كم/س ، سرعة الدراجة = 15 كم/س ،
من الشكل المقابل : $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ حيث $\vec{v}_1 = 90$ ،
: $\vec{v}_1 = 90$ ، $\vec{v}_2 = 30$ ، $\vec{v}_3 = 15$ ،
: $90 = 15n$ ، $6 = n$ ساعة

السيارة تلاقى الدراجة بعد ساعتين على بعد $180 = 30 \times 6$ كم من نقطة بداية حركتها

ثانياً : يسيران في اتجاهين متضادين

وحيث سرعة السيارة = 30 كم/س ، سرعة الدراجة = 15 كم/س ،
من الشكل المقابل : $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ حيث $\vec{v}_1 = 90$ ،
: $\vec{v}_1 = 90$ ، $\vec{v}_2 = 30$ ، $\vec{v}_3 = 15$ ،
: $90 = 15n$ ، $6 = n$ ساعة

السيارة تلاقى الدراجة بعد ساعتين على بعد $60 = 30 \times 2$ كم من نقطة بداية حركتها

السرعة النسبية

نعلم أن الحركة مفهوم نسبي يتغير وضعها من مشاهد إلى آخر بل هي تتغير بالنسبة للمشاهد الواحد حسب حالته

متجه السرعة النسبية :

عندما يرصد مشاهد (أ) السرعة التي يتحرك بها جسم (ب) تنشأ حالتان :

(١) المشاهد ثابت في مكانه و عندئذ يرصد السرعة الحقيقية للجسم \vec{v}_B

(٢) المشاهد يتحرك بسرعة \vec{v}_M و عندئذ لن يرصد السرعة الحقيقية للجسم ب

و لكنه سيرصد سرعة تساوى " $\vec{v}_B + (- \vec{v}_M)$ " و الناتج يسمى

سرعة ب بالنسبة إلى أ و يرمز له بالرمز $\vec{v}_{B/A}$

$$\text{أى أن : } \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_M$$

ملاحظات :

* عندما تكون حركة أ ، ب فى إتجاه واحد و بنفس السرعة فإن $\vec{v}_{B/A} = 0$

أى أن : ب يبدو ساكناً للمشاهد

* عندما تكون حركة أ ، ب فى إتجاهين متضادين فإن معيار سرعة ب يبدو أكبر من حقيقته

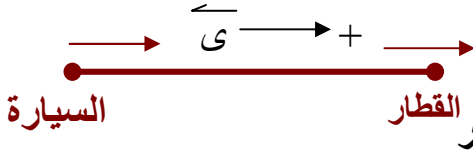
$$* \quad \| \vec{v}_B \| = \| \vec{v}_{B/A} \|$$

مثال ٣ قطار وسيارة يتحركان في نفس الطريق و سرعتهما ٩٠ كم / س ، ١١٠ كم / س على الترتيب أوجد سرعة السيارة بالنسبة للقطار إذا كانا يسيران في نفس الإتجاه ، يسيران في إتجاهين متضادين

الحل

بفرض \vec{v} متجه وحدة في نفس إتجاه حركة السيارة

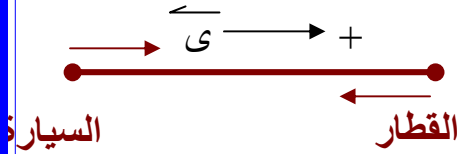
* إذا كانا يسيران في نفس الإتجاه



سرعة السيارة بالنسبة للقطار = سرعة السيارة - سرعة القطار

$$= 110 - 90 = 20 \text{ كم / س}$$

* إذا كانا يسيران في إتجاهين متضادين



سرعة السيارة بالنسبة للقطار = سرعة السيارة - سرعة القطار

$$= 110 - (-90) = 200 \text{ كم / س}$$

مثال ٤ تتحرك سفينة في مسار مستقيم نحو ميناء و لما صارت على بعد ٤٥ كم من الميناء مرت فوقها طائرة في الإتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم / س و رصدت حركة السفينة فبدأت لها متحركة بسرعة ٢٦٥ كم / س . أحسب الزمن الذي تستغرقه السفينة حتى تصل للمين

الحل

معيار سرعة السفينة بالنسبة للطائرة = معيار سرعة السفينة - معيار سرعة الطائرة

$$= 265 - 250 = 15 \text{ كم / س}$$

$$\therefore \text{معيار سرعة السفينة} = 265 - 250 = 15 \text{ كم / س}$$

$$\therefore \text{الزمن الذي تستغرقه السفينة حتى تصل للميناء} = 45 \div 15 = 3 \text{ ساعات}$$

الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة " المتغيرة " :

إذا تحرك جسيم بحيث يتغير متجه سرعته من لحظة لأخرى في المقدار أو الإتجاه أو في كليهما فإنه يتحرك حركة متغيرة أو يتحرك بعجلة

متجه العجلة \vec{a} :

هو المعدل الزمني للتغير في متجه السرعة أو هو التغير في متجه السرعة في وحدة الزمن إذا كان \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 متجهي سرعة جسيم عند لحظتين متتاليتين t_1 ، t_2 على الترتيب فإن :

$$\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \vec{a}$$

وحدة قياس العجلة : هي : وحدة قياس السرعة ÷ وحدة الزمن

$$\begin{aligned} \text{كم / س} / \text{ث} &= \frac{5}{18} \text{ م} / \text{ث}^2 \\ 1 \text{ كم} / \text{س} / \text{ث} &= \frac{250}{9} \text{ سم} / \text{ث}^2 \end{aligned}$$

الحركة منتظمة التغير :

إذا كان متجه العجلة ثابتاً لجميع الأزمنة فإن الجسيم يتحرك حركة منتظمة التغير أو يتحرك بعجلة منتظمة

ملاحظة : تكون الحركة منتظمة إذا كان : $a = 0$ ، تكون الحركة منتظمة التغير

إذا كان : $a = 0$ = مقدار ثابت

، تكون الحركة متغيرة إذا كان : a دالة في الزمن مثل : $a = 3t - 1$

قوانين الحركة ذات العجلة المنتظمة :

إذا تحرك جسيم في خط مستقيم حركة منتظمة التغير

و كان : \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 ، \vec{a} ، \vec{v} هي القياسات الجبرية للمتجهات

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{a} (t_2 - t_1)$$

، \vec{v} متجه وحدة موازى لإتجاه الحركة

حيث : ع سرعته بعد فترة زمنية ن ، ع. سرعته عند بدء قياس الزمن " السرعة الابتدائية " ،
العجلة فإن :

$$(1) \quad ع = ع. + ح ن$$

$$(2) \quad ف = ع. ن + \frac{1}{2} ح ن^2$$

$$(3) \quad ع^2 = ع. + 2 ح ف$$

ملاحظات :

١ - السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما = سرعته فى منتصف هذه الفترة الزمنية

فمثلاً : * إذا قطع جسيم مسافة ٦ أمتار فى الثانية الخامسة فإن :

$$\frac{6}{1} = ع. + 4,5 ح \quad \text{أى :} \quad 6 = ع. + 4,5 ح$$

* أما إذا قطع مسافة ٨ سم فى الثانية الخامسة و السادسة فإن :

$$\frac{8}{2} = ع. + 5 ح \quad \text{أى :} \quad 4 = ع. + 5 ح$$

* و إذا قطع مسافة ١٨ سم فى الثانى الثلاث السابعة و الثامنة و التاسعة فإن :

$$\frac{18}{3} = ع. + 7,5 ح \quad \text{أى :} \quad 6 = ع. + 7,5 ح$$

٢ - تكون الحركة متسارعة " مقدار السرعة يتزايد " إذا

إذا كان متجهها العجلة و السرعة فى إتجاه واحد

أى أن : $ع > ح$

تكون الحركة تقصيرية " مقدار السرعة يتناقص "

إذا كان متجهها العجلة و السرعة فى إتجاهين متضادين

أى أن : $ع < ح$

مثال ٥ : يتحرك جسيم على خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع فى الثانية الثالثة ١٢ متراً و قطع فى الثانية الخامسة و السادسة ٣٠ متراً أوجد مقدار كل من العجلة و السرعة الابتدائية

الحل

حيث أن الحركة ذات عجلة منتظمة ، الجسيم قطع فى الثانية الثالثة ١٢ متراً

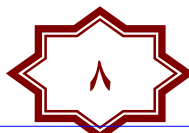
$$(1) \quad 12 = ع. + 2,5 ح$$

، الجسيم قطع فى الثانية الخامسة و السادسة ٣٠ متراً

$$(2) \quad 30 = ع. + 5 ح$$

إدوار عادل

أعداد



منذى توجبه الرياضيات

بطرح (٢) من (١) $\therefore 2,5 - 3 =$

$\therefore د = 1,2$ م / ث \therefore بالتعويض في أجهما $\therefore ع = 9$ م / ث

مثال ٦: تحرك جسيم من السكون فقطع ١٥٠ م و صارت سرعته ٥٤ كم / ث ثم أنقطعت العجلة و سار بالسرعة التي أكتسبها مسافة ٣٠٠ م ثم تحرك بتقصير منتظم ١,٥ م / ث حتى سكن أحسب السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها

الحل

في الحالة الأولى : $ع = ٠$ ، $ف = ١٥٠$ م

$$ع = ٥٤ \text{ كم / ث} = \frac{٥}{١٨} \times ٥٤ = ١٥ \text{ م / ث}$$

حيث $ع^2 = ع^2 + ٢ ح ف$

$$\therefore ٢٢٥ = ٠ + ٢ ح \times ١٥٠ \quad \Leftarrow \quad ح = \frac{٣}{٤} \text{ م / ث}$$

$$ع = ع + ع = ١٥ \quad \therefore ١٥ = ٠ + \frac{٣}{٤} ن \quad \Leftarrow \quad ن = ٢٠ \text{ ث}$$

في الحالة الثانية : $ح = ٠$ أي السرعة منتظمة $ف = ٣٠٠$ م ، $ع = ١٥$ م / ث

$$\therefore ن = \frac{٣٠٠}{١٥} = ٢٠ \text{ ث}$$

في الحالة الثالثة : $ع = ١٥$ م / ث ، $ع = ٠$ ، $ح = ١,٥$ م / ث

حيث $ع^2 = ع^2 + ٢ ح ف$

$$\therefore ٠ = ٢٢٥ - ٢ \times ١,٥ \times ف \quad \Leftarrow \quad ف = ٧٥ \text{ م}$$

$$ع = ع + ع = ١٥ \quad \therefore ١٥ = ٠ - ١,٥ ن \quad \Leftarrow \quad ن = ١٠ \text{ ث}$$

$$\therefore ف = ١٥٠ + ٣٠٠ + ٧٥ = ٥٢٥ \text{ م}$$

$$ن = ٢٠ + ٢٠ + ١٠ = ٥٠ \text{ ث}$$

\therefore السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها $= ٥٢٥ \div ٥٠ = ١٠,٥$ م / ث

تمارين

- (١) قطع راكب دراجة على طريق مستقيم مسافة ٢٧ كم بسرعة ١٨ كم / س ثم قطع مسافة ٩ كم بسرعة ١٢ كم / س أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت :
- أولاً : الإزاحتين في اتجاه واحد ثانياً : الإزاحتين في اتجاهين متضادين
- (٢) يسير راكب دراجة في طريق مستقيم بسرعة ٦ م / ث شاهد شخص يسير على نفس الطريق بسرعة ٤ م / ث فإذا كان البعد بينهما ١٠٠ متر فبعد كم ثانية يلتقيان إذا كانا :
- أولاً : يسيران في اتجاه واحد ثانياً : يسيران في اتجاهين متضادين
- (٣) بدأ راكب دراجة حركته الساعة الثامنة صباحاً بسرعة ١٤ كم / س من مدينة أ قاصداً مدينة ب وفي الحادية عشر صباحاً بدأت سيارة حركتها من مدينة أ أيضاً قاصدة مدينة ب بسرعة ٧٧ كم / س أوجد متى وأين تلحق السيارة بالدراجة
- (٤) تتحرك سيارتان أ ، ب على طريق مستقيم بالسرعتين ٦٠ كم / س ، ٩٠ كم / س وفي اتجاه آ ب أوجد سرعة ب بالنسبة إلى أ ، سرعة أ بالنسبة إلى ب
- (٥) قطار وسيارة يتحركان في اتجاه واحد وقد بدت سرعة السيارة لراكب في القطار وكأنها تتحرك بسرعة ١٥ كم / س في الاتجاه المضاد أوجد السرعة الفعلية للسيارة علماً بأن السرعة الفعلية للقطار ١٢ كم / س
- (٦) طائرة حربية أ تطير بسرعة ١٢٠٠ كم / س تتعقب طائرة أخرى ب تطير في نفس الاتجاه بسرعة ٩٦٠ كم / س وعندما صار البعد بينهما ٧٥٠ متراً أطلقت الطائرة أ صاروخاً بسرعة دفعه ١٠٠ م / ث على الطائرة ب فأصابها بعد زمن قدره ن أوجد قيمة ن
- (٧) تتحرك سيارتان على نفس الطريق المستقيم في اتجاهين متضادين فإذا كانت المسافة بينهما ٤ كم وسرعة إحدى السيارتين ٧٠ كم / س وتقابلا بعد دقيقتين فما هي السرعة الفعلية

(٨) قامت سيارة ١ متحركة على طريق مستقيم و بقياس السرعة النسبية لسيارة ب تسبلا أمامها في نفس الإتجاه و جدتها ١٨ كم / س و لما خفضت السيارة ١ سرعتها إلى النصف و أعادت قياس السرعة النسبية للسيارة ب و جدتها أصبحت ٦٠ كم / س فما هي السرعة الفعلية لكل من السيارتين

(٩) سيارة نقل طولها ٤ أمتار تتحرك بسرعة ٥٤ كم / س مرت بسيارة أخرى طولها ٦ أمتار أوجد الزمن اللازم لكي تمر السيارة الأولى بالكامل من السيارة الثانية إذا كانت السيارة الثانية :
(١) ساكنة (٢) تتحرك بسرعة ١٨ كم / س في نفس الإتجاه
(٣) تتحرك بسرعة ١٨ كم / س في الإتجاه المضاد

(١٠) تحرك جسم بعجلة منتظمة فقطع في الثوان الأربعة الأولى من حركته ١٦٠ متراً ثم قطع في الثانية السابعة و الثامنة مسافة ٤٠ متراً أوجد السرعة الابتدائية للحركة و المسافة التي يقطعها من بدء الحركة حتى يقف الجسم

(١١) يتحرك جسم بعجلة منتظمة في إتجاه ثابت و كانت سرعته في لحظة ما ١٥ م / ث و بعد نصف دقيقة أصبحت سرعته ٥ م / ث بين متى يسكن الجسم إبتداء من تلك اللحظة

(١٢) نقصت سرعة سيارة من ٦٠ ١٨ كم / س إلى ١٥ ١٨ كم / س بتقصير منتظم بعد أن قطعت مسافة نصف كيلو متر أوجد الزمن الذي قطعت فيه هذه المسافة و الزمن الذي يمضي حتى تقف تماماً

(١٣) يتحرك جسيم في خط مستقيم في إتجاه ثابت بعجلة منتظمة فيقطع ١٤٤ سم في ٦ ثواني ، ثم يسير بالسرعة التي أكتسبها لمدة ٤ ثواني يقطع خلالها ١٣٦ سم ثم يتحرك بعد ذلك بتقصير منتظم معياره يساوى ضعف معيار العجلة الأولى حتى يسكن تماماً أوجد السرعة الابتدائية للجسيم و المسافة الكلية

(١٤) يتحرك جسمان في خط مستقيم واحد و في إتجاه واحد أحدهما بسرعة منتظمة مقدارها ٢٢ م / ث و الثاني بعجلة منتظمة ٥٠ سم / ث^٢ فإذا تلاقي الجسمان عندما كانت سرعة الثاني ١٢ م / ث عين متى و أين يتقابلان للمرة الثانية

الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية

جميع الأجسام ثقيلها و خفيفها تسقط نحو الأرض بنفس العجلة المنتظمة التي تسمى عجلة الجاذبية الأرضية أو عجلة التثاقل أو عجلة السقوط الحر و هي تعمل دائماً نحو مركز الأرض و يعتبر معيارها

هو : $٩٨٠ \text{ سم} / \text{ث}^٢ \text{ أو } ٩,٨ \text{ م} / \text{ث}^٢$

مكان السقوط أو القذف لأسفل

قوانين الحركة الرأسية :

(١) إذا كان الجسم ساقطاً أو مقذوفاً إلى أسفل :

$$(١) \quad \text{ع} = \text{ع} + \text{ع} \quad \text{ن}$$

$$(٢) \quad \text{ف} = \text{ع.ن} + \frac{١}{٢} \text{ع.ن}^٢$$

$$(3) \quad \text{ع}^2 = \text{ع}^1 + \text{ع}^2 \text{ ف}$$

في الشكل المقابل : نعتبر الإتجاه الموجب هو الإتجاه الرأسي إلى أسفل فتكون :

*** كل من : ع ، ع. ، ء ، ف موجبة و بالتالي فإن :**

* كل من ع ، ف تزداد بإزدياد الزمن ن مقيساً من لحظة القذف إلى أسفل

*** الإزاحة في أى فترة زمنية = المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة**

(٢) إذا كان الجسم مقذوفاً إلى أعلى :

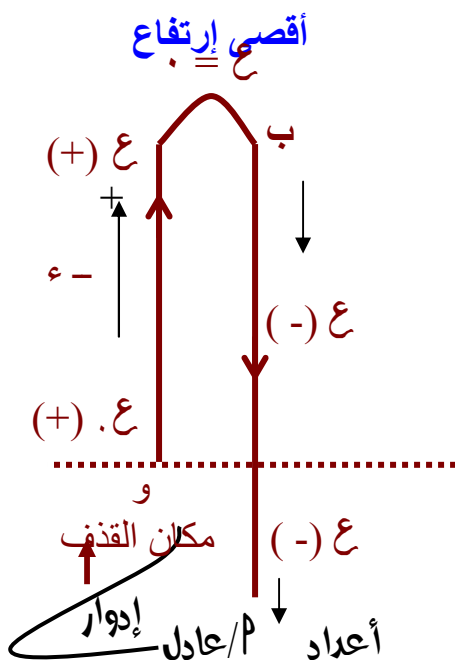
(١) ع = ع. - ع ن

$$(٢) \text{ ف} = \text{ع.ن} - \frac{١}{٢} \text{ع.ن}^٢$$

$$(3) \quad \varepsilon^2 = \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \text{ ف}$$

في الشكل المقابل : نعتبر الإتجاه الموجب

هو الإتجاه الرأسى إلى أعلى فتكون :



* ع. موجبة ، ع سالبة

* ع تتناقص و تساوى صفر عند أقصى إرتفاع ثم يعود الجسم للهبوط

* ع موجبة أثناء الصعود و سالبة أثناء الهبوط

* ف موجبة أعلى نقطة القذف و سالبة أسفل نقطة القذف

$$* \text{ زمن أقصى إرتفاع} = \frac{ع}{ع} , \text{ أقصى إرتفاع} = \frac{ع^2}{2ع}$$

* زمن الصعود = زمن الهبوط

* مقدار السرعة التى يعود بها الجسم إلى نقطة القذف = مقدار سرعة القذف بإشارتين مختلفتين

أمثلة :

(١) سقط جسم إلى أسفل من إرتفاع ف متر عن سطح الأرض فوصل بعد ١٠ ثوانى من لحظة سقوطه أوجد سرعة وصول الجسم إلى سطح الأرض ، الإرتفاع ف و كذا سرعة الجسم بعد أن قطع مسافة ٢٥٠ متر

الحل

$$ع = ٠ , ن = ١٠ \text{ ث} , ع = ٩,٨ \text{ م / ث}^2$$

$$: ع = ع + ع \cdot ن$$

$$: ع = ٠ + ٩,٨ \times ١٠ = ٩٨ \text{ م / ث}$$

$$: ف = ع \cdot ن + \frac{1}{2} ع \cdot ن^2$$

$$: ف = ٠ + ٩,٨ \times \frac{1}{2} \times ١٠^2 = ٤٩٠ \text{ م}$$

$$: ع^2 = ع \cdot ٢ + ع^2 \cdot ف , ف = ٢٥٠ \text{ م}$$

$$: ع^2 = ٠ + ٩,٨ \times ٢ \times ٢٥٠ = ٩٨٠٠$$

$$: ع = ٧٠ \text{ م / ث}$$

إعداد / عادل إدوار

٢ (سقط جسم من نقطة فوق سطح أرض رخوة رأسياً لأسفل فوصل إلى سطحها بعد ٥ ثواني من بدء الحركة ثم غاص فيها بعجلة منتظمة حتى سكن بعد نصف ثانية أخرى أوجد المسافة الكلية التي قطعها الجسم من لحظة سقوطه حتى لحظة سكونه مرة أخرى

الحل

فوق سطح الأرض :

$$ع. = ٠ ، ن = ٥ ث ، ع = ٩,٨ م / ث^٢$$

$$: ع = ع. + ع$$

$$.: ع = ٠ + ٩,٨ \times ٥ = ٤٩ م / ث$$

$$: ، ف = ع. ن + \frac{1}{٢} ع ن^٢$$

$$.: ف = ٠ + ٩,٨ \times ٥ \times \frac{1}{٢} = ١٢٢.٥ م$$

تحت سطح الأرض :

$$ع = ٤٩ م / ث ، ع = ٠ ، ن = \frac{1}{٢} ث$$

$$: ، ع = ع. + ع$$

$$.: ٠ = \frac{1}{٢} ع + ٤٩$$

$$: ، ع = ع. + ٢ ع ف$$

$$.: ٠ = (٤٩) + ٢ \times (٩٨ -) \times ف$$

$$\Leftarrow ف = ١٢.٢٥ م$$

$$.: المسافة الكلية = ١٢٢.٥ + ١٢.٢٥ = ١٣٤,٧٥ م$$

٣ (قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٧٠ م / ث أوجد مقدار كل من سرعة الجسيم و إزاحته بعد

أولاً : ٥ ثواني من لحظة القذف ثانياً : بعد ١٠ ثواني من لحظة القذف

ثم بين ما إذا كان الجسيم صاعداً أم هابطاً في كل حالة

الحل

$$: ع = ع. - ع ن$$

$$.: ع = ٧٠ - ٩,٨ \times ٥ = ٢١ م / ث$$

منذى توجيه الرياضيات



أعداد / عادل إدوار

$$: \text{ف} = \text{ع} \cdot \text{ن} - \text{ع} \cdot \text{ن}^2$$

$$\therefore \text{ف} = 70 \times 5 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 25 = 227.5 \text{ متر}$$

الجسم صاعد

$$\text{ع} = 70 - 9.8 \times 10 = 28 \text{ م / ث}$$

$$\text{ف} = 70 \times 10 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 100 = 210 \text{ م}$$

(٤) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٤ م / ث من سطح الأرض أوجد زمن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم ، أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم ، الزمن المستغرق من لحظة القذف حتى عودته إلى نقطة القذف مرة أخرى

الحل

$$\text{زمن أقصى ارتفاع} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = \frac{14}{9.8} = \frac{1}{7} \text{ ث}$$

$$\text{أقصى ارتفاع} = \frac{\text{ع}^2}{2 \times \text{ع}} = \frac{14 \times 14}{9.8 \times 2} = 10 \text{ م}$$

حيث أن: زمن الصعود = زمن الهبوط

∴ الزمن المستغرق من لحظة القذف حتى عودته إلى نقطة القذف مرة أخرى

$$= 2 \times \frac{1}{7} = \frac{2}{7} \text{ ث}$$

(٥) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٤٧ متر بسرعة ابتدائية مقدارها ٣٤,٣ م / ث . أوجد الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض ، مقدار سرعته عندما يصل إلى سطح الأرض ، كذا الزمن الذي يستغرقه حتى يصل إلى نقطة القذف مرة أخرى

الحل

$$\text{ع} = 34.3 \text{ م / ث} , \text{ ف} = 147 - \text{ع} \cdot \text{ن}$$

$$: \text{ف} = \text{ع} \cdot \text{ن} - \frac{1}{2} \text{ ع} \cdot \text{ن}^2$$

$$\therefore 147 - 34.3 \text{ ن} = \frac{1}{2} \times 9.8 \text{ ن}^2$$

بضرب الطرفين × $\frac{2}{9.8}$
أعداد / عادل إدوار

$$\therefore \text{ن}^2 - \text{ن} - 30 = 0$$

$$\therefore (\text{ن} - 10)(\text{ن} + 3) = 0$$

$$\therefore \text{ع} = 10 - \text{ع} - 6 \text{ ن}$$

$$\text{ع} = 34,3 - 9,8 \times 10 = 63,7 \text{ م / ث}$$

\therefore مقدار سرعته عندما يصل إلى سطح الأرض = $63,7 \text{ م / ث}$

$$\text{، زمن أقصى إرتفاع} = \frac{\text{ع}^2}{2 \times \text{ع}} = \frac{34,3^2}{9,8} = 3,5 \text{ ث}$$

$$\therefore \text{زمن الوصول لنقطة القذف} = 2 \times 3,5 = 7 \text{ ث}$$

تمارين

(١) سقط جسيم من قمة برج بسرعة ٥. ١٢٢ م رأسياً لأسفل أوجد سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض و زمن وصوله إلى سطح الأرض ، كذا المسافة التي يقطعها خلال الثانية الأخيرة من فترة الوصول إلى سطح الأرض

(٢) قذف جسيم رأسياً إلى أسفل من قمة برج بسرعة ١١ م / ث فوصل إلى قاعدة البرج بعد ٥ ثواني من لحظة القذف أوجد إرتفاع البرج ، سرعة وصول الجسيم لقاعدة البرج

(٣) سقط جسيم رأسياً من نقطة على إرتفاع ٤٠٠ متر عن سطح أرض رملية فغاص فيها مسافة ١٤ سم قبل أن يسكن أوجد مقدار سرعته عند سطح الأرض ، عجلته المنتظمة التي يتحرك بها داخل الأرض ثم أحسب الزمن الذي يستغرقه في قطع المسافتين

(٤) طائرة تتحرك أفقياً على إرتفاع ٧٠٠ متر من سطح الأرض قذف منها جسيم إلى أسفل بسرعة ٢١ م / ث أوجد سرعة وصول الجسيم إلى سطح الأرض و الزمن الذي يستغرقه في ذلك و كذلك المسافة التي يقطعها في الثانية الأخيرة وحدها

(٥) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى فعاد إلى نقطة القذف بعد ١٠ ثواني من لحظة القذف أوجد مقدار السرعة التي قذف بها ، و أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم و كذا زمن الوصول إلى ارتفاع ١١٧,٦ متر من نقطة القذف و المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة

(٦) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بسرعة مقدارها ٢٤.٥ م/ث فوصل إلى سطح الأرض " قاعدة البرج " بعد ٨ ثواني أوجد ارتفاع البرج ، أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض و كذا المسافة التي يقطعها الجسيم خلال هذه الفترة

(٧) من قمة برج يعلو ١٩٦ متراً عن سطح الأرض قذف جسمان بسرعة واحدة ١٤,٧ م/ث أحدهما رأسياً إلى أسفل و الآخر رأسياً إلى أعلى أوجد الزمن الذي يستغرقه كل منهما في الوصول إلى سطح الأرض

(٨) سقط جسم من ارتفاع ٤٠ متر عن سطح الأرض و في نفس اللحظة و من سطح الأرض قذف جسم آخر رأسياً لأعلى بسرعة ٢٠ م/ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية ن أوجد هذه الفترة الزمنية ن ثم أوجد المسافة التي قطعها كل منهما

(٩) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٣٤,٣ متر بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٩,٤ م/ث أوجد الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض ، مقدار سرعته عندما يصل إلى سطح الأرض ، كذا الزمن الذي يستغرقه حتى يصل إلى نقطة القذف مرة أخرى

(١٠) سقطت كرة من ارتفاع ١٦,٩ متراً عن سطح الأرض ثم ارتدت إلى ارتفاع ٢.٥ م و كان الزمن الكلي ٦ ثواني أوجد سرعتها لحظة وصولها سطح الأرض و سرعة ارتدادها عن سطح الأرض

تفاضل الدوال المتجهة

عندما يتغير متجه من لحظة إلى لحظة أخرى سواء بتغير معياره أو اتجاهه أو كليهما معاً فإن هذا المتجه يكون دالة في الزمن و بالتالي يكون كل من متجه الموضع و متجه الإزاحة و متجه السرعة و متجه العجلة دوال في الزمن ن

، و إذا كان \vec{y} متجه وحدة موجب في اتجاه حركة جسيم في خط مستقيم فإن :

$$\frac{\vec{v}}{v} = \vec{y} \quad * \quad \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{v}}{v} = \vec{y} \quad *$$

أمثلة :

(١) إذا كان متجه الموضع لجسم متحرك هو $\vec{r} = (7t^3 - 21t + 20) \vec{y}$ أوجد : متجهات الإزاحة و السرعة و العجلة و أحسب مقدار الإزاحة و العجلة عند $t = 1$

الحل

$$\text{عندما : } t = 0 \quad \vec{r} = 20 \vec{y} \quad \text{حيث} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 7t^2 \vec{y} - 21 \vec{y} = (7t^2 - 21) \vec{y}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 14t \vec{y} = 14 \vec{y} \quad \text{عند } t = 1 \quad \vec{a} = 14 \vec{y}$$

$$\vec{v} = 7t^2 \vec{y} - 21 \vec{y} = (7 - 21) \vec{y} = -14 \vec{y} \quad \text{عند } t = 1 \quad \vec{v} = -14 \vec{y}$$

$$\text{عند } t = 1 \quad \vec{r} = (7 - 21 + 20) \vec{y} = 6 \vec{y} \quad \text{عند } t = 1 \quad \vec{r} = 6 \vec{y}$$

(٢) إذا كان متجه الموضع لجسم متحرك هو $\vec{r} = (4.9t^2 - 19.6t + 10) \vec{y}$ أوجد : متجهات الإزاحة و السرعة و العجلة و أحسب الزمن الذي تنعدم عنده السرعة ثم

عين فترات التسارع و التقصير لحركة الجسم

أعداد / عادل إدوار

الحل

$$\overline{م} = ١٥ \text{ ي} \quad \text{عندما : } ٠ = \text{ن}$$

$$\text{حيث } \overline{ف} = \overline{م} - \overline{م} = (٩,٨ \text{ ن} - ١٩,٦ \text{ ن}) \text{ ي}$$

$$\overline{ع} = \overline{ف} = \overline{ع} = (٩,٨ \text{ ن} - ١٩,٦ \text{ ن}) \text{ ي}$$

$$\overline{ح} = \overline{ع} = \overline{ع} = ٩,٨ \text{ ي}$$

$$\text{عندما } ٠ = \text{ع} \quad \text{فإن : } ٩,٨ \text{ ن} - ١٩,٦ \text{ ن} \quad \therefore \text{ن} = ٢$$

الحركة تكون متسارعة عندما : $٠ < \text{ع} < \text{ح}$

أى عندما : $٩,٨ (٩,٨ \text{ ن} - ١٩,٦ \text{ ن}) < ٠$ أى عندما : $٢ < \text{ن}$

الحركة تكون تقصيرية عندما : $٠ > \text{ع} > \text{ح}$

أى عندما : $٩,٨ (٩,٨ \text{ ن} - ١٩,٦ \text{ ن}) > ٠$ أى عندما : $٢ > \text{ن}$

(٣) إذا كان متجه الإزاحة لجسم متحرك هو $\overline{ف} = \overline{س} + (٨ \text{ ن} - ٢ \text{ ن}) \overline{ص}$

أوجد : متجهى السرعة و العجلة ثم بين متى تكون الحركة متسارعة و متى تكون تقصيرية

الحل

$$\overline{ع} = \overline{ف} = \overline{ع} = (٨ \text{ ن} - ٢ \text{ ن}) \overline{ص}$$

$$\overline{ح} = \overline{ع} = \overline{ع} = ٨ \text{ ن} - ٢ \text{ ن}$$

الحركة تكون متسارعة عندما : $٠ < \text{ع} < \text{ح}$

أى عندما : $٨ (٨ \text{ ن} - ٢ \text{ ن}) < ٠$ أى عندما : $٨ > \text{ن}$

الحركة تكون تقصيرية عندما : $٠ > \text{ع} > \text{ح}$

أى عندما : $٨ (٨ \text{ ن} - ٢ \text{ ن}) > ٠$ أى عندما : $٨ < \text{ن}$

٤) عين متجه السرعة و العجلة ثم بين هل الحركة منتظمة أو منتظمة التغير أو متغيرة فيما يأتي :

$$(١) \quad \overline{v} = \overline{v}(١ - ٣ن) \quad (٢) \quad \overline{v} = \overline{v}(٢ن + ٣ - ٤) \quad \overline{v}$$

$$(٣) \quad \overline{v} = \overline{v}(٢ن - ٣ + ٥) \quad \overline{v}$$

الحل

$$(١) \quad \overline{v} = \overline{v} = \frac{\overline{v}}{٣ن} = \overline{v} \quad \therefore \text{الحركة منتظمة}$$

$$(٢) \quad \overline{v} = \overline{v} = \frac{\overline{v}}{٣ن + ٣ - ٤} = \overline{v} \quad \therefore \text{الحركة منتظمة التغير}$$

$$(٣) \quad \overline{v} = \overline{v} = \frac{\overline{v}}{٢ن - ٣ + ٥} = \overline{v} \quad \therefore \text{الحركة متغيرة}$$

تمارين

(١) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث كان متجه الموضع له هو

$$\overline{v} = \overline{v}(١١ + ٤ن - ٢ن - ٣) \quad \overline{v}$$

أوجد متجهات الإزاحة و السرعة و العجلة و أحسب مقدار المسافة عندما تنعدم السرعة

(٢) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث كان متجه الموضع له هو

$$\overline{v} = \overline{v}(٣ن - ٥ + ٧) \quad \text{أوجد}$$

الموضع الابتدائي له ، الإزاحة خلال ثانيتين ابتداء من ن = ٠ ، السرعة الابتدائية

(٣) إذا كان متجه موضع جسيم يعطى كدالة في الزمن من العلاقة

$$\overline{v} = \overline{v}(٢ن - ٣) \quad \text{أوجد}$$

متجهة السرعة و العجلة ثم بين متى تكون الحركة متسارعة و متى تكون تقصيرية

(٤) إذا كان متجه الموضع لنقطة مادية تتحرك في مستوى هو

$$\vec{r} = 3\vec{s} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\vec{v}$$

متجهها وحدة متعامدين أثبت أن الحركة تكون متسارعة عند $n = 1$ ، تقصيرية عند $n = 3$

(٥) جسيمان أ ، ب يتحركان في خطين متوازيين فإذا كانت الإزاحة للجسيم أ تتعين بالقانون :

$$\vec{r}_A = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\vec{v}$$

أوجد السرعة الابتدائية للجسيم أ بالنسبة للجسيم ب عند نفس اللحظة

(٦) عين متجه السرعة و العجلة ثم بين هل الحركة منتظمة أو منتظمة التغير أو متغيرة فيما يأتي :

$$(١) \vec{r} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\vec{v} \quad (٢) \vec{r} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)\vec{v}$$

$$(٣) \vec{r} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)\vec{v} \quad (٤) \vec{r} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3)\vec{v}$$

(٧) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث : $\vec{r} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ (حيث : \vec{v}_1 سم ، \vec{v}_2 ثانية)

أوجد السرعة الابتدائية للجسيم ثم أوجد كلاً من : \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 عندما $\vec{r} = 10$ سم / ث

(٨) بدأت نقطة مادية حركتها من نقطة " و " على خط مستقيم بحيث كان القياس الجبري للإزاحة

يتعين بالسنتيمتر من القانون : $\vec{r} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\vec{v}$ حيث \vec{v}_1 بالثواني اثبت أن النقطة المادية

تبدأ في العودة إلى " و " بعد مضي ثانيتين و تصلها بسرعة 9 سم / ث