

Phénomène d'induction :

1° Loi de Faraday :

une variation sous le temps du flux magnétique $\Phi(\vec{B})$ à travers un circuit (C) de surface (S) entraîne l'apparition d'une force électromotrice (f.e.m.) donnée par :

$$e = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\Phi(\vec{B}) = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| \cdot |S| \cos \theta$$

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{B}| \cdot |S| \cos \theta)$$

Avec θ l'angle entre le champ B et la surface S.

La variation / temps du $\Phi(\vec{B})$ est due soit à la variation sous le temps de B ou de S ou bien de θ .

2° Circuit mobile sous un champ magnétique statique :

soit q charge électrique mobile à la vitesse \vec{v} / au repère (R) et immobile / au repère (R').



$$\begin{cases} \text{Dans } (R) & \vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \\ \text{Dans } (R') & \vec{F} = q \cdot \vec{E} \end{cases}$$

Donc : $\vec{E} = (\vec{v} \wedge \vec{B})$

→ c'est le champ électromoteur.

Cl la circulation de E le long

$$C(\vec{E}) = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \oint_{(C)} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{L}$$

$$C(\vec{E}) = - \oint_{(C)} (\vec{B} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{L}$$

$$= - \oint_{(C)} \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{L})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{v} \perp d\vec{L}$ (tangente)

$$\vec{v} \wedge d\vec{L} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge d\vec{L} = \frac{d}{dt} d\vec{S}$$

on peut écrire ainsi :

$$C(\vec{E}) = - \oint_{(C)} \frac{d}{dt} d\vec{S} \cdot \vec{B} = - \frac{d}{dt} \oint_{(C)} d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

$$C(\vec{E}) = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = e$$

c'est la loi de Faraday

3° Relation de Maxwell-Faraday :

on utilise le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned} e &= \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \end{aligned}$$

Alors :

$$\iint_{(S)} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

on peut écrire : $\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$

C'est l'équation de Maxwell-Faraday.

→ Expression générale du champ électrique :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} = - \frac{d}{dt} (\text{rot} \vec{A}) = - \text{rot} \frac{d\vec{A}}{dt}$$

on peut écrire :

$$\vec{E} = - \frac{d\vec{A}}{dt} - \text{grad} \phi \quad (\text{fonct}^\circ \text{ scalaire})$$

cette fonction scalaire n'est rien d'autre que le potentiel électrostatique V.

$$\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}(V)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_{\text{electrostatique}}$$

E_m : est le champ électromoteur d'origine dynamique.

$E_{\text{electrostatique}}$: est le champ électrostatique.

4/ Loi de Lenz : Énoncé :

Le courant induit crée par la variation de $\phi(B)$ sous le temps a un sens tel qu'ils s'opposent par ses effets aux causes qui lui ont donné naissance.

5/ Courant de Foucault :

ce sont les courants électriques induites $i(t)$ dans un conducteur volumique sous l'action d'un champ magnétique B dépendant du temps, trouvant par la circulation des électrons de conduction de densité \vec{j} . "Champ uniforme & in direction sans et intensité en tous points de l'espace."

En raison du phénomène d'induction, il apparaît un champ électrique.

$$E_{\text{induit}} : \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

γ est la conductivité de conducteur (inverse de la résistivité ρ en $\Omega \cdot m$)

\vec{j} vecteur densité de courant.

\Rightarrow Cas d'un conducteur cylindrique exposé à un C.m. uniforme / à l'espace et variable sous le temps.

$$\vec{j} = -\frac{\delta r}{2} \frac{d}{dt} (\vec{B}(t)) \vec{e}_0$$

Interprétation : Courants de Foucault sont plus intenses sur la surface latérale du conducteur et leur sens obéit à la loi de Lenz. La variation de B a induit des courants $i(t)$ de densité \vec{j} qui tendent à compenser la croissance ou décroissance de B . Ainsi, plus $B(t)$ varie rapidement plus les courants seront intenses.

$$\vec{j}(r, \delta, \frac{\partial B}{\partial t}) \Rightarrow \text{si } r = a \text{ } \vec{j} \text{ est intense}$$

$$\Rightarrow \text{si } r = 0 \text{ } \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \text{si } \delta \uparrow \Rightarrow \vec{j} \uparrow$$

$$\Rightarrow \text{si } B \uparrow \Rightarrow \vec{j} \uparrow$$

6/ Application des C.F. :

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cos \omega t$$

Calcul de densité de courant volumique :

$$\vec{j} = -\frac{\delta r}{2} \frac{d}{dt} (B(t)) \vec{e}_0$$

$$\vec{j} = \frac{\delta r \omega B_0}{2} \sin \omega t \vec{e}_0$$

\vec{j} est proportionnelle à ω .

Calcul de puissance dissipée par effet joule $P : \frac{dP}{dV} = \frac{j^2}{\delta}$ alors,

$$P = \iiint_V \frac{j^2}{\delta} dV = \frac{1}{\delta} \iiint_V j^2 dV$$

$$= \frac{\delta}{4} \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) \int_0^a r^2 (2\pi r h dr) = \frac{\delta}{4} \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) (2\pi h) \int_0^a r^3 dr$$

$$= \pi \frac{\gamma}{8} \omega^2 B_0^2 \sin^2(\omega t) a^4 h$$

→ valeur moyenne dans le temps de $A(t)$.

$$\langle A(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

$$\text{exp: } \langle \frac{P}{V} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P}{V} dt$$

Densité volumique de puissance = $\frac{P}{V}$

* Puissance moyenne fournie aux charges par unité de volume :

$$\langle \frac{P}{V} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P}{V} dt$$

$$\langle \frac{P}{V} \rangle = \pi \frac{\gamma}{8} \omega^2 B_0^2 a^4 h \frac{1}{\pi a^2 h T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

$$\text{Avec: } \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\langle \frac{P}{V} \rangle = \frac{\gamma}{16} \omega^2 B_0^2 a^2$$

La puissance P est proportionnelle à γ, ω, B_0 et a . Les CF présentent les pertes d'énergie sous forme de chaleur.

Solution: Remplacer le conducteur cylindrique de rayon a par des fils conducteurs de rayon $b = \frac{a}{n}$, n fils, le volume total reste inchangé. Ainsi, les pertes en énergie seront divisées par n^2 .

$$\langle \frac{P'}{V} \rangle = \frac{\gamma}{16} \omega^2 B_0^2 b^2 = \frac{1}{n^2} \langle \frac{P}{V} \rangle$$

* Pour que l'échauffement \uparrow , on peut $\uparrow \omega$
Inductances et énergies magnétiques des circuits électriques:

10/ Inductances des circuits électriques

* Inductance mutuelle de 2 circuits

filiformes: D'après la loi de Biot et savart, le courant I_1 crée B_1 et A_1 qui engendrent à leur tour dans le circuit (C_2) un flux magnétique. $\Phi_{21}(B_1)$

$$\Phi_{21}(B_1) = \oint_{(C_2)} B_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \oint_{(C_2)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{r_{12}} d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

D'après le théorème de Stokes:

$$\Phi_{21}(B_1) = \oint_{(C_2)} A_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$$

→ on définit l'inductance mutuelle de 2 circuits (C_1) et (C_2) :

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{21}(B_1)}{I_1} = \frac{\Phi_{12}(B_2)}{I_2}$$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$$

c'est la formule de Neumann

* Inductance propre (auto-induction) d'un circuit filiforme:

$$L = \frac{\Phi}{I} \text{ en Henry}$$

Avec Φ est le flux propre à ~~travers~~ le circuit C engendré par le courant I

* Inductance: le Φ_1 à travers (C_1) est la somme des flux propres Φ_{11}

engendré par I_1 (ou B_1) dans (C_1) et le flux ϕ_{12} mutuel engendré par I_2 (ou B_2) en (C_1) . $\Phi_1 = \phi_{11}(B_1) + \phi_{12}(B_2)$
De même le flux Φ_2 à travers (C_2) est :

$$\Phi_2 = \phi_{22}(B_2) + \phi_{21}(B_1)$$

→ Les flux en fonction des inductances propres et mutuelles :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

Remarque : " Dans ϕ_{ij} le premier indice est relié au circuit (C_i) et le deuxième indice est relié au champ B_j "

→ Les flux sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

→ Les f.e.m sont données par la loi de Faraday :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

2°/ Energies magnétiques des circuits électriques :

* Cas d'un circuit filiforme :

La circulation du courant I dans un circuit d'inductance L , engendre une f.e.m :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$U = -e = L \frac{dI}{dt}$$

L'énergie magnétique emmagasinée ~~total~~ dans un circuit électrique pendant dt est :

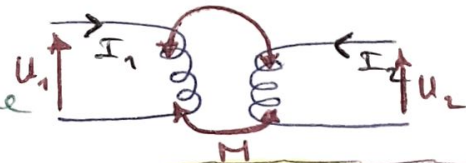
$$\delta w = U I dt = L I dI$$

$$w = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

Analogie : condensateur : $E_{ele} = \frac{1}{2} C U^2$

* Cas de 2 circuits filiformes :

Transformateur avec couplage entre le primaire et le secondaire.



$$-e_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = U_1$$

$$-e_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = U_2$$

La variation de l'énergie magnétique :

$$\frac{\delta w}{dt} = -(e_1 I_1 + e_2 I_2) = (U_1 I_1 + U_2 I_2)$$

$$\frac{\delta w}{dt} = \left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_{12} \frac{dI_2}{dt} \right) I_1 + \left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M_{21} \frac{dI_1}{dt} \right) I_2$$

Comme $M_{12} = M_{21}$, on a alors :

$$w = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2 M I_1 I_2)$$

* Cas d'un circuit non filiforme :

Soit un circuit volumique (C) qui se compose en tube de circuits filiformes (C_i) parcourus par des courants dI . E.m du circuit (C) est la somme des énergies de tous les circuits (C_i) .

$$w = \frac{1}{2} \int \Phi \cdot dI$$

Φ le flux magnétique à travers le circuit (C) :

$$\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Considérant le régime permanent :

$$I = \int_C di = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \oint \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{\ell}$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{j} \cdot dV$$

avec : dV élément de volume et V le volume du circuit volumique (C)

$$d\vec{s} \cdot d\vec{\ell} = dV$$

Equations de Maxwell :

1° Equation de Maxwell - Ampère :

* En régime permanent : \vec{j} est à flux conservatif. Le courant est le même pour toute les sections du volume.

$$\oint (\vec{j} \cdot d\vec{\ell}) = 0 \iff \text{div } \vec{j} = 0$$

* En régime dynamique : on a :

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

on rappelle l'équation de Maxwell - Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{on a : } \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E} \cdot \epsilon_0)$$

$$\text{div } \vec{j} = -\epsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Lorsque la divergence d'un vecteur est nulle alors ce vecteur découle d'un rotationnel. Maxwell a prouvé que ce dernier n'est rien d'autre que le champ magnétique.

$$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} = \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

C'est l'équation de Maxwell - Ampère.

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: c'est la densité de courants de dérivation de déplacements.

\vec{j} : c'est la densité de courants de conduction. (mouvement des charges réelles).

2° Equations de Maxwell :

* Equation de Maxwell - Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

* Conservation du flux magnétique :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2)$$

* Equation de Maxwell - Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

* Equation de Maxwell - Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

on peut utiliser :

Le vecteur induction électrique :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Le vecteur excitation magnétique :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

L'équation de Maxwell - Ampère peut s'écrire aussi :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Ondes électromagnétiques "EM"

dans le vide :

I - Equations de Propagation du champ

EM dans le vide : le vide veut dire vide de charge électrique $\rho = 0$ et aussi du vecteur densité de courant $\vec{J} = \vec{0}$.

⇒ les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

- Maxwell - Gauss : $\text{div} \vec{E} = 0$ (1)
- Conservation du $\phi(B)$: $\text{div} \vec{B} = 0$ (2)
- Maxwell - Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (3)
- Maxwell - Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

le but est de trouver des équations diff's du second degré / à l'espace et le temps du champ EM.

* Calculons le rotationnel du rotationnel du champ \vec{E} et du champ \vec{B} .

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \\ &= \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \end{aligned}$$

Comme : $\text{div} \vec{E} = 0$:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B})$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

on obtient :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

C'est l'équation de propagation du champ électrostatique dans le vide.

Avec : $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \Leftrightarrow \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

Faisons la même chose pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ &= \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} \end{aligned}$$

Comme : $\text{div} \vec{B} = 0$:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\Delta \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) &= \vec{\text{rot}}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) \end{aligned}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

on obtient :

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

⇒ les équations de propagation du champ EM dans le vide sont :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

⇒ on peut écrire sous forme :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

* on rappelle que le champ EM (\vec{E}, \vec{B}) dépend de 4 variables : (x, y, z, t)

1, on a: $\vec{E}(x, y, z, t)$ et $\vec{B}(x, y, z, t)$ $\vec{E} \perp \vec{B}$

II - Solution des équations de propagation

à une dimension dans le vide:

1°/ Solution à dimension: onde plane

$\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$

La propagation de l'onde est suivant un des axes (ox, oy, oz) on prend p.ex: (oz). Les équations de propagation

du champ \vec{E}, \vec{B} dans ce cas s'écrivent

comme:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

La solution de ces équations est sous la forme suivante:

et

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{z}{c} \right)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \vec{B}_2 \left(t + \frac{z}{c} \right)$$

$\vec{E}_1 \left(t - \frac{z}{c} \right)$: onde progressive dans le sens de z positif à la vitesse c .

$\vec{E}_2 \left(t + \frac{z}{c} \right)$: " négatif à la vitesse c .

2°/ Solution à une dimension: onde sphérique $\vec{E}(r, t)$ et $\vec{B}(r, t)$

L'onde sphérique est aussi solution à une dim qui progresse en s'atténuant en $\frac{1}{r}$, contrairement à l'onde plane dont l'amplitude reste constante.

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{r}{c} \right)$$

$$\vec{B}(r, t) = \vec{B}_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \vec{B}_2 \left(t + \frac{r}{c} \right)$$

les sens de r positifs les sens de r négatifs.

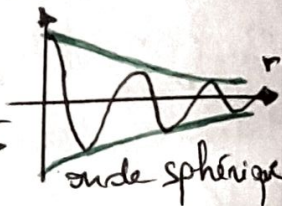
à la vitesse c

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Les amplitudes (\vec{E}, \vec{B}) des ondes planes sont constantes par contre les amplitudes (\vec{E}, \vec{B}) des ondes sphériques sont proportionnelles à $\frac{1}{r}$



onde plane.



onde sphérique

III - Onde plane monochromatique:

1°/ Définition:

a°/ onde plane monochromatique.

soit: $\vec{E}_1 \left(t - \frac{z}{c} \right)$ cette onde est dite progressive monochromatique si elle se met sous forme sinusoïdale dans le sens des z positifs:

$$\vec{E}_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) = \vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

b°/ Longueur d'onde:

$$\vec{E}_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) = \vec{E}_0 \cos \left(\omega t - \frac{\omega z}{c} \right)$$

$$\frac{\omega z}{c} = \frac{2\pi z}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda_0} z \quad \boxed{n_0 = cT}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = xk_x + yk_y + zk_z \quad \vec{k} \parallel \vec{e}_z$$

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = zk = z \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

c°/ Vecteur d'onde:

$$\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u}$$

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} z$$

\vec{u} : vecteur unitaire dans la direction de propagation qu'on a choisi suivant l'axe oz .

$\vec{r} = (x, y, z)$: vecteur position.

$$\vec{k}_0 = \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = (0, 0, k)$$

On prend l'onde EM progressive monochromatique dans le sens des z positifs:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\omega} \omega t\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \quad (2)$$

Les expressions (1) et (2) ne sont que les parties réelles des formes exponentielles du champ EM.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$$

2°/ Caractéristiques du champ EM (onde plane monochromatique).

Sous forme exponentielle, les champs et les potentiels s'écrivent comme:

$$\vec{V} = V_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{A} = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\text{div } \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\text{div } \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} \quad \text{div } \vec{B} = -i \vec{k} \cdot \vec{B}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i \vec{k} \wedge \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -i \vec{k} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}) = -i \omega \vec{B}$$

$$-i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$$\Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}) \text{ Triade direct.}$$

$$\text{grad } V = \vec{\nabla} \cdot V = i \vec{k} \cdot V$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i \omega \vec{E}$$

a°/ position du \vec{E} / \vec{B} :

D'après l'équation de Maxwell-Ampère et les relations:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{rot } \vec{B} = -i \vec{k} \wedge \vec{B} = +i \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

b°/ Relation entre ω et k

$$k = \frac{\omega}{c}$$

c°/ Position du EM / à l'axe oz :

oz est l'axe de propagation de l'onde plane parallèle au vecteur d'onde \vec{k} .

D'après les équations de Maxwell dans le vide, on trouve:

$$\text{div } \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{B} = -i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$$

Le champ EM plan $(\vec{E}, \vec{B}) \perp \vec{k}$

c-à-d $(\vec{E}, \vec{B}) \perp$ à l'axe de propagation.

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$$

Relation entre les modules de \vec{E} et \vec{B} : L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une droite, les amplitudes sont
 $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \Rightarrow |\vec{k} \wedge \vec{B}| = |\vec{k}| |\vec{B}| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ reliées par:
 $|\vec{k}| |\vec{B}| = \frac{\omega}{c^2} |\vec{E}| \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{c^2}{\omega} k$

$$|\vec{E}| = c |\vec{B}|$$

Le module du champ \vec{E} est $3 \cdot 10^8$ plus grand que celui de \vec{B} .

III - Onde plane polarisée rectiligne-ment:

1° Polarisation de l'onde EM:

le champ \vec{E} se déduit du champ \vec{B} par une rotation $\frac{\pi}{2}$ et un rapport c . L'étude de la trajectoire de l'extrémité du champ \vec{E} décrit la polarisation prenant le cas: $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$

On prend $E_z = 0$ et oz est l'axe de propagation de l'onde. La polarisation est définie dans le plan Oxy :

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t) \vec{e}_x + E_y(z, t) \vec{e}_y$$

le vecteur \vec{E} varie dans la trajectoire le plan Oxy selon la trajectoire de l'extrémité de \vec{E} .

2° Différentes sortes de polarisation de l'onde EM: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

Avec: $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y$
 E_{0x} et E_{0y} sont les amplitudes complexes.

a° Polarisation rectiligne:

$$E_{0x} = \alpha E_{0y} \quad \alpha: \text{est un réel}$$

b° Polarisation Circulaire:

L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle. Dans le sens droit ou gauche suivant la direction du vecteur d'onde \vec{k} et les amplitudes sont reliées par:

$$E_{0x} = \pm i E_{0y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = +i \text{ p. indirect} \\ \alpha = -i \text{ p. direct} \end{array} \right.$$

$$\text{Exemple: } \vec{E}_0 = E_{0x} \vec{e}_x + i E_{0x} \vec{e}_y = E_{0x} (\vec{e}_x + i \vec{e}_y)$$

c° Polarisation elliptique:

L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse dans le sens droit ou gauche.

$$E_{0x} = \alpha E_{0y} \quad \alpha: \text{est un complexe}$$

3° Onde EM monochromatique et polarisée rectilignement:

le champ \vec{E} et le champ \vec{B} gardent une direction fixe et par conséquent

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k z)}$$

on prend \vec{E} oscillant // à l'axe ox et \vec{B} // à l'axe oy . Ainsi on a:

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x \text{ et } \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow k E_{0x} e^{i(\omega t - k z)} \vec{e}_y = \omega B_{0y} e^{i(\omega t - k z)} \vec{e}_y$$

$$E_{0x} = \frac{\omega}{k} B_{0y}$$

Retrouvant le même résultat en appliquant l'équation de Maxwell-Faraday. $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$-ik E_{0x} e^{i(\omega t - kz)} = -i \omega B_{0y} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow k E_{0x} = \omega B_{0y} \Rightarrow E_{0x} = \frac{\omega}{k} B_{0y}$$

Ceci donne : $E_x = \frac{\omega}{k} B_y = c B_y$

Les champs E et B sont en phase, c-à-d, ils passent au même instant par un maximum, minimum ou zéro tous les deux.

10/ Flux énergétique EM dans le vide :

20/ Vecteur Poynting :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

\vec{P} s'écrit suivant la direction de propagation

- Une onde EM se propage dans le vide dans la direction du vecteur Poynting \vec{P} . Le vecteur \vec{P} représente la direction du flux énergétique par unité de temps et unité de surface, il a pour unité : $[\vec{P}] = W \cdot m^{-2}$

$$\Phi(\vec{P}) = \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{P} \, dV$$

$$\Phi(\vec{P}) = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{em} \, dV$$

$$\text{Car : } \text{div} \vec{P} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (w_m)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (w_e) = -\frac{\partial}{\partial t} (w_{em})$$

Interprétation : Le flux du vecteur Poynting \vec{P} à travers une surface (Σ) est la variation de la densité d'énergie EM w_{em} par unité de temps contenue dans un volume (V) s'appuyant sur (Σ) .

II - Equation de Maxwell dans un diélectrique

10/ Cas d'un diélectrique linéaire :

- Equation de Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$
- Conservation du flux magnétique : $\text{div} \vec{B} = 0$
- Equation de Maxwell-Faraday : $\nabla \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Equation de l'Ampère : $\nabla \times (\vec{B}) = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

20/ Equation de propagation : c'est le principe de calcul que dans le vide.

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \Delta \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Avec : v la vitesse de propagation de l'onde EM dans le diélectrique :

(isolant) : $\frac{1}{v^2} = \epsilon \mu \Rightarrow$ L'indice de

réfraction : $n = \frac{c}{v} = \frac{1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{1/\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$