



www.dirasats.com

هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه



شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا

www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com



Notes du Cours d'Electrostatique

Prof. Patrizia Vignolo

`Patrizia.Vignolo@inln.cnrs.fr`

Jean-François Schaff

`jean-francois.schaff@inln.cnrs.fr`

Sommaire :

– Analyse Vectorielle	page 1
– Champ et potentiel électrostatique	page 5
– Théorème de Gauss	page 9
– Conducteur en équilibre	page 13
– Energie électrostatique	page 15

Cours N° 1 : Analyse Vectorielle

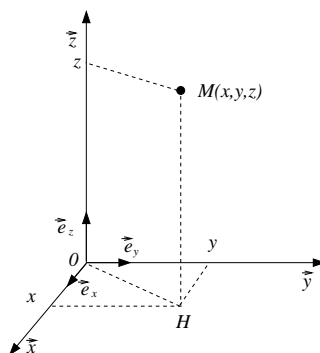
1 Représentation d'un point dans l'espace

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Selon la symétrie du problème, on choisira :

les coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

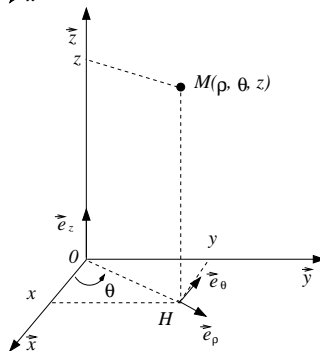
$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$



les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

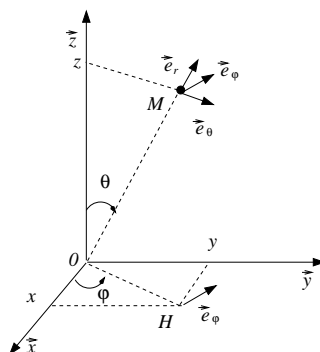
$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$



les coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$



2 Vecteurs

Rappel. Soient \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs avec composantes $\vec{v}_1 = (v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z})$ et $\vec{v}_2 = (v_{2,x}, v_{2,y}, v_{2,z})$, s un scalaire. Alors :

- $\vec{v}_1 = v_{1,x}\vec{e}_x + v_{1,y}\vec{e}_y + v_{1,z}\vec{e}_z$, avec $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$;
- $s\vec{v}_1 = (sv_{1,x}, sv_{1,y}, sv_{1,z})$
- $\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1,x} + v_{2,x}, v_{1,y} + v_{2,y}, v_{1,z} + v_{2,z})$;
- $\vec{D} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_{1,x} - v_{2,x}, v_{1,y} - v_{2,y}, v_{1,z} - v_{2,z})$;
- $S = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos \theta_{1,2} = v_{1,x}v_{2,x} + v_{1,y}v_{2,y} + v_{1,z}v_{2,z}$;
- $\vec{V} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1,y}v_{2,z} - v_{2,y}v_{1,z}, v_{1,z}v_{2,x} - v_{2,z}v_{1,x}, v_{1,x}v_{2,y} - v_{2,x}v_{1,y})$
avec $|\vec{V}| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \sin \theta_{1,2}$.

Remarque. Un vecteur qui est indépendant du sens de l'axe qui constitue son support est dit vecteur *polaire*. Un vecteur qui est déterminé par le sens de rotation autour de son axe-support est dit vecteur *axial* ou *pseudo-vecteur*.

3 Circulation d'un vecteur

Circulation élémentaire : $d\mathcal{C} = \vec{v} \cdot d\vec{l}$

- en coordonnées cartésiennes : $d\mathcal{C} = v_x dx + v_y dy + v_z dz$;
- en coordonnées cylindriques : $d\mathcal{C} = v_\rho d\rho + v_\theta \rho d\theta + v_z dz$;
- en coordonnées sphériques : $d\mathcal{C} = v_r dr + v_\theta r d\theta + v_\phi r \sin \theta d\phi$.

Circulation sur un chemin : $\mathcal{C} = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{l}$

Circulation sur un chemin fermé : $\mathcal{C} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$

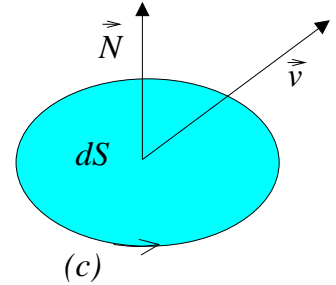
Remarque. Si le vecteur \vec{v} représente une force, la circulation n'est autre que le travail.

4 Flux d'un vecteur

On définit le flux élémentaire $d\Phi$ d'un vecteur v à travers une surface élémentaire dS :

$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{v} \cdot \vec{N} dS. \quad (1)$$

Si la surface est fermée, \vec{N} est orienté de l'intérieur vers l'extérieur. Si la surface est ouverte (comme en figure), une fois orienté le contour (c) de la surface, N est défini par la règle du tire-bouchon.

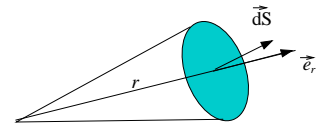


5 Angle solide

L'angle solide élémentaire $d\Omega$, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet O vaut

$$d\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{e}_r}{r^2}, \quad (2)$$

où \vec{dS} est le vecteur de norme dS , normal à la surface dS .



6 Opérateurs vectoriels

Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

Le gradient est un vecteur qui pointe vers les valeurs croissantes de f . *Rappel* : $\boxed{\text{d}f = \vec{\nabla} f \cdot \text{d}\vec{r}}$.

Divergence : $\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Formule de Green-Ostrogradsky :

$$\boxed{\Phi = \iint_{S \text{ fermée}} \vec{v} \cdot \text{d}\vec{S} = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \text{d}\tau} \quad (3)$$

Rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

Formule de Stokes :

$$\boxed{\mathcal{C} = \oint \vec{v} \cdot \text{d}\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot \text{d}\vec{S}} \quad (4)$$

Le rotationnel mesure si un champ tourne localement.

Laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

L'opérateur Laplacien peut s'appliquer à une fonction scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur

$$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}.$$

7 Quelques relations vectorielles

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\text{div}(\vec{\nabla} f) = \Delta f$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{\nabla} f) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) = \vec{\nabla}(\text{div } \vec{v}) - \Delta \vec{v}$$

7.1 Forme explicite des operateurs vectoriels

– Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\Delta \vec{v} &= \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

– Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\theta) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \\
\Delta f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\Delta \vec{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

– Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \vec{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi \\
\Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\
\Delta \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f)$.

Cours N° 2 : Champ et potentiel électrostatique

1 Charges électriques

L'électrostatique est l'étude des propriétés conférées à l'espace qui entoure une charge électrique.

La charge électrique dans le SI est mesurée en Coulomb (C).

Toute charge est multiple de la charge élémentaire e , qui vaut : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Dans la suite on parlera de :

- charges ponctuelles (analogues aux points matériels en mécanique)
- distributions continues de charges, définies par la densité de charge, qui peut être :
 - linéique, $\lambda = dq/dl$;
 - surfacique, $\sigma = dq/dS$;
 - volumique, $\rho = dq/d\tau$.

2 Loi de Coulomb

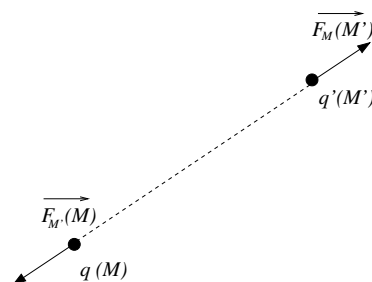
La force de Coulomb est la force exercée par une charge q au point M sur une charge q' au point M' :

$$\vec{F}_M(M') = Kqq'\vec{u}_{MM'}/r^2 \quad (5)$$

avec $K = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$.

La force exercée par la charge q' au point M' sur la charge q au point M vérifie le principe d'action-réaction : $\vec{F}_{M'}(M) = -\vec{F}_M(M')$.

La force est répulsive si les charges sont de même signe (comme dans la figure), elle est attractive si les charges sont de signe contraire.



3 Champ et potentiel

3.1 Charge ponctuelle

La présence d'une charge q au point M permet de définir au point M' une propriété vectorielle, le champ électrostatique

$$\vec{E}_M(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \vec{u}_{MM'} / r^2,$$

et une propriété scalaire, le potentiel électrostatique

$$V_M(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q / r + \text{cte.}$$

Le champ et le potentiel électrostatiques sont liés par la relation :

$$\vec{E}_M(M') = -\vec{\nabla} V_M(M').$$

3.2 Système de charges

En présence de plusieurs charges q_i , le champ électrostatique est la somme des champs électrostatiques produits par chaque charge q_i :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \vec{u}_{M_i M'} / r_i^2.$$

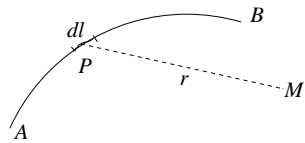
De même pour le potentiel électrostatique :

$$\vec{V}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i / r_i.$$

En présence d'une distribution de charges linéaire λ , le champ et le potentiel s'écrivent :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_{PM'}$$

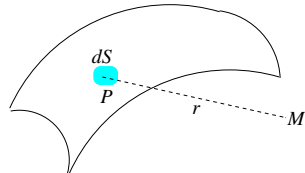
$$V(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{\lambda dl}{r}$$



En présence d'une distribution de charges de surface σ , le champ et le potentiel s'écrivent :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}_{PM'}$$

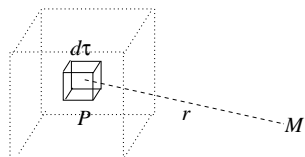
$$V(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r}$$



En présence d'une distribution de charges volumique ρ , le champ et le potentiel s'écrivent :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}_{PM'}$$

$$V(M') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{r}$$



4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ sont les courbes tangentes point par point au champ électrique.

Les surfaces équipotentielles $V = \text{const.}$ sont définies par une circulation élémentaire du champ nulle. En effet :

$$V = \text{const.} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \text{grad}V \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

5 Force et énergie potentielle électrostatique

Une charge q dans un champ électrique \vec{E} est soumise à une force

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Cette force est une force conservative car elle peut être écrite comme le gradient d'une fonction scalaire :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p,$$

où E_p est l'énergie potentielle électrostatique qui est liée au potentiel électrostatique par la relation $E_p = qV$.

6 Loi locale et circulation du champ électrique

Du fait que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, on obtient pour le champ électrique une loi locale : $\boxed{\text{rot}\vec{E} = 0}$,

et une loi intégrale : $\boxed{\int_{AB} \vec{E} d\vec{l} = V_A - V_B}$

7 Dipôle électrostatique

On appelle dipôle électrostatique un système de deux charges $-q$ et $+q$ placées aux points A et B .

Le champ à grande distance a pour composantes :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\phi = 0,$$

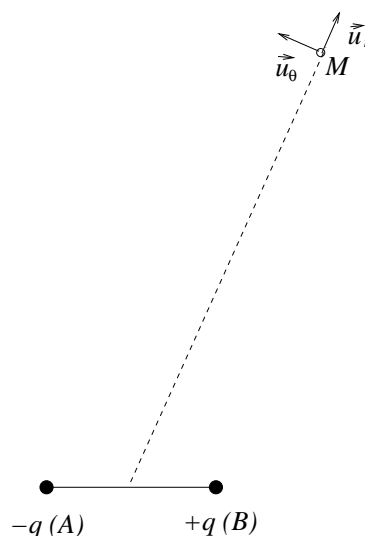
où p est la norme du vecteur *moment dipolaire* \vec{p} :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{AB}.$$

Le potentiel créé par un dipôle électrostatique s'écrit :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2},$$

dans la limite où $r \gg |\overrightarrow{AB}|$.



7.1 Dipôle électrostatique dans un champ externe \vec{E} .

Si le champ \vec{E} est uniforme :

- la force exercée sur le dipôle est nulle

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0};$$

- le moment des forces oriente le dipôle selon le champ appliqué

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{p} \wedge \vec{E};$$

- l'énergie potentielle

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

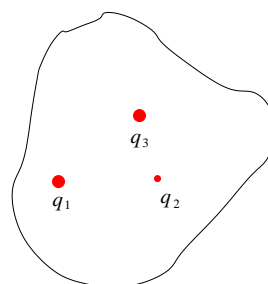
est minimale lorsque $\theta = 0$: le dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.

Cours N° 3 : Théorème de Gauss

1 Théorème de Gauss

Le flux d'un vecteur champ électrique à travers une surface fermée n'est dû qu'aux charges à l'intérieur de cette surface :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}} \quad (6)$$



Démonstration : cas d'une charge ponctuelle.

Considérons une charge q englobée par une surface S . Soit dS et dS' deux éléments de surface découpés par les deux angles solide $d\Omega$ issus de O (voir la figure ci-dessous).

Le flux $d\Phi$ à travers dS vaut :

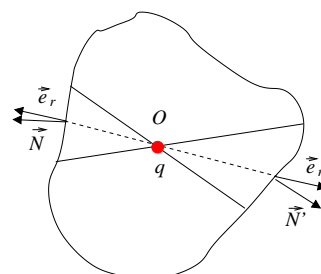
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Le flux $d\Phi'$ à travers dS' vaut :

$$d\Phi' = \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N}' dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Au total

$$\Phi = \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$



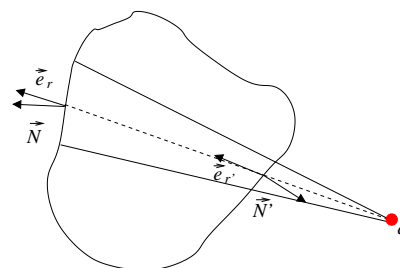
Considérez maintenant une charge q qui n'est pas englobée par la surface (comme en figure ci-dessous). Dans ce cas le flux $d\Phi$ à travers dS vaut :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Le flux $d\Phi'$ à travers dS' vaut :

$$d\Phi' = \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N}' dS' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Donc on obtient $d\Phi + d\Phi' = 0$, et au total $\Phi = 0$.



2 Loi intégrale et loi locale

Soit S une surface fermée contenant une densité volumique ρ , alors on a :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Equation (7) constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

En exploitant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky) on obtient la forme locale du théorème de Gauss (2^{eme} loi de l'électrostatique)

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0}.$$

Remarque : En l'absence de charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

Rappel : Le champ électrostatique \vec{E} obéit aux lois suivantes :

	locale	intégrale
1 ^{ere} loi	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$	$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$
2 ^{eme} loi	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

3 Equation de Poisson et de Laplace (pour le potentiel)

De la forme locale du théorème de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ et de la relation qui lie le champ au potentiel, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, on obtient, en présence de charges, l'équation de Poisson :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow \boxed{\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0}$$

et, sans charges, l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

4 Condition de passage à l'interface entre deux distributions de charges

Considerons le champ en deux points M_1 et M_2 infiniment proches d'une interface, avec une distribution de charge surfacique σ , séparant deux milieux avec deux distributions de charges ρ_1 et ρ_2 .

Dans le repère de Frenet on peut écrire :

$$\vec{E}_1 = E_{1,t}\vec{T} + E_{1,n}\vec{N}_{12}$$

$$\vec{E}_2 = E_{2,t}\vec{T} + E_{2,n}\vec{N}_{12}$$

où \vec{N}_{12} est le vecteur unitaire normal à la surface et orienté du point M_1 au point M_2 .

De la première loi de l'électrostatique on obtient :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{1,t}AB - E_{2,t}CD = 0.$$

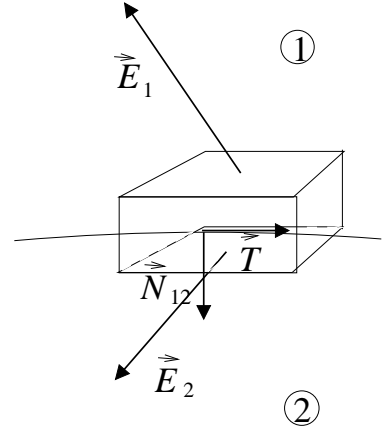
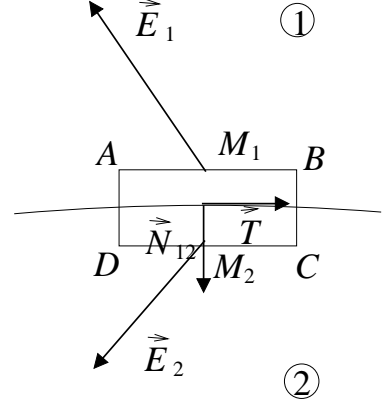
Donc le champ tangent à l'interface est conservé : $E_{1,t} = E_{2,t}$

De la deuxième loi de l'électrostatique (théoreme de Gauss) on obtient :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{E}_1 \cdot \vec{N}_1 dS + \vec{E}_2 \cdot \vec{N}_2 dS \\ &= E_{2,n}dS - E_{1,n}dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Donc le champ normal $\vec{E}_n = E_n\vec{N}_{12}$ subit une discontinuité si l'interface est chargée :

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{N}_{12}.$$



Cours N° 4 : Conducteur en équilibre

1 Loi de conservation de la charge

Dans un système isolé, la charge électrique se conserve : $q(t) = \text{Constante}$

2 Corps conducteurs et corps isolants

Corps conducteurs : Une partie des électrons peuvent se déplacer.

Corps isolants (ou diélectriques) : Les charges ne sont pas libres.

3 Equilibre électrostatique

Considerons un conducteur chargé. Le conducteur est à l'équilibre électrostatique si la force sur chaque charge est nulle. Ça implique que à l'intérieur du conducteur

$$\vec{E}_{int} = \vec{0},$$

c'est-à-dire $V_{int} = V_0 = \text{Constante}$, $\rho_{int} = 0$.

3.1 Théorème de Coulomb

Si le conducteur est chargé on a également $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, et la charge ne peut se répartir que sur la surface ($\sigma \neq 0$). Les charges surfaciques sont à l'équilibre si la surface est une surface équipotentielle.

La surface d'un conducteur à l'équilibre étant une surface équipotentielle, au voisinage de la surface le champ est normal à la surface même et vaut

$$\vec{E}_{ext} = \sigma \vec{N} / \epsilon_0. \quad (8)$$

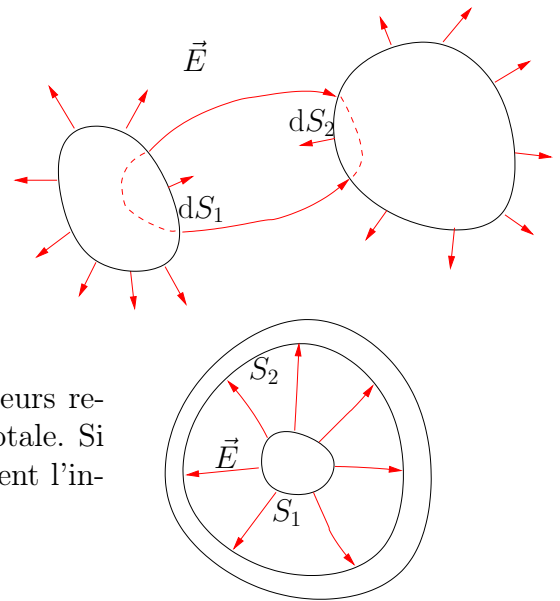
On appelle *cage de Faraday* une cavité à l'intérieur d'un conducteur (où $\vec{E} = \vec{0}$).

4 Influence de deux conducteurs chargés

Soit deux conducteurs (C_1) et (C_2) dont au moins un chargé (C_1). La distribution de charge sur (C_2) devient inhomogène à cause du champ produit par la charge sur le conducteur (C_1).

4.1 Théorème de Faraday

L'équilibre est atteint quand les charges $Q_1 = \sigma_1 dS_1$ et $Q_2 = \sigma_2 dS_2$ se faisant face sont égales et opposées (théorème de Faraday).



Si l'ensemble des lignes de champs d'un des conducteurs rejoignent l'autre (figure à côté) l'influence est dite totale. Si seulement une partie des lignes de champs se rejoignent l'influence est dite partielle (figure en haut).

5 Capacité d'un conducteur

La charge d'un conducteur unique est proportionnelle au potentiel V . Le coefficient de proportionnalité entre la charge et le potentiel est la capacité :

$$C = \frac{q}{V}. \quad (9)$$

La capacité se mesure en *farad* (F) : un farad = $\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Joule}}$.

Pour une sphère de rayon de 1 m : $C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{1}{9} 10^{-9}$ F.

5.1 Capacité d'un condensateur

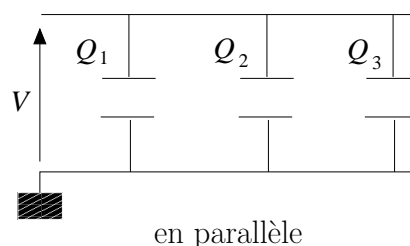
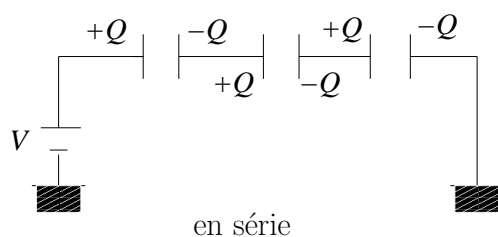
Si deux conducteurs (C_1) et (C_2) sont en influence totale, ils forment un condensateur de capacité

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}. \quad (10)$$

5.2 Associations de condensateurs

Condensateurs en série : $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots$

Condensateurs en parallèle : $C = C_1 + C_2 + \dots$



Cours N° 5 : Energie électrostatique

1 Charge ponctuelle en interaction avec un champ extérieur

Rappel :

- Une charge ponctuelle isolée ne peut pas avoir une énergie potentielle (elle ne se “voit” pas).
- Dans le cas de deux charges q et q' :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qq'}{r}, \quad (11)$$

qui peut être considérée comme (i) l'énergie de q' dans le champ de q ou comme (ii) l'énergie de q dans le champ q' . Equation (11) peut être écrite

$$E_p = \frac{1}{2} (qV_{q' \rightarrow q} + q'V_{q \rightarrow q'}) \quad (12)$$

où $V_{q' \rightarrow q}$ est le potentiel créé par la charge q' au point q .

1.1 Energie potentielle d'une distribution de charges ponctuelles

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (13)$$

où $V_i = V_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots \rightarrow i}$ est le potentiel résultant créé par les charges $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots$ au point où demeure la charge q_i .

1.2 Energie potentielle d'une distribution continue de charges

$$E_p = \frac{1}{2} \int V dq \quad (14)$$

où $dq = \lambda dl$ si la distribution est linéaire, $dq = \sigma dS$ si la distribution est superficielle, $dq = \rho d\tau$ si la distribution est volumique.

2 Energie électrostatique emmagasinée dans les conducteurs chargés

2.1 Cas d'un conducteur unique

Pour un conducteur portant une charge q et de capacité C :

$$E_p = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}. \quad (15)$$

2.2 Cas d'un condensateur

Pour un condensateur avec armatures aux potentiels V_1 et V_2 , portant charges q_1 et q_2 ($q_2 = -q_1$) :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2) = \frac{1}{2}q_1(V_1 - V_2) \\ &= \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}. \end{aligned} \quad (16)$$

Dans le cas d'un condensateur plan, de capacité $C = \epsilon_0 S/d$, le champ est uniforme et sa norme vaut $E = (V_1 - V_2)/d$. On peut donc écrire $E_p = \frac{1}{2}\epsilon_0 SdE^2$.

La densité d'énergie par unité de volume vaut

$$\mathcal{E} = \frac{dE_p}{d\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

3 Forces électrostatiques à partir de l'énergie

3.1 Système à charge constante

Considérons le cas d'un condensateur préalablement chargé et puis isolé. Le système étant isolé, la conservation de l'énergie implique que $d\mathcal{L} + dE_p = 0$. Donc de la relation $\vec{F} \cdot d\vec{l} + \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{l}$, on trouve que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p. \quad (17)$$

3.2 Système à potentiel constant

Considérons un condensateur chargé relié à une source en permanence. Dans ce cas $d\mathcal{L} + dE_p = d\mathcal{L}_s$, où \mathcal{L}_s est l'énergie dépensée par la source pour maintenir le potentiel constant, avec

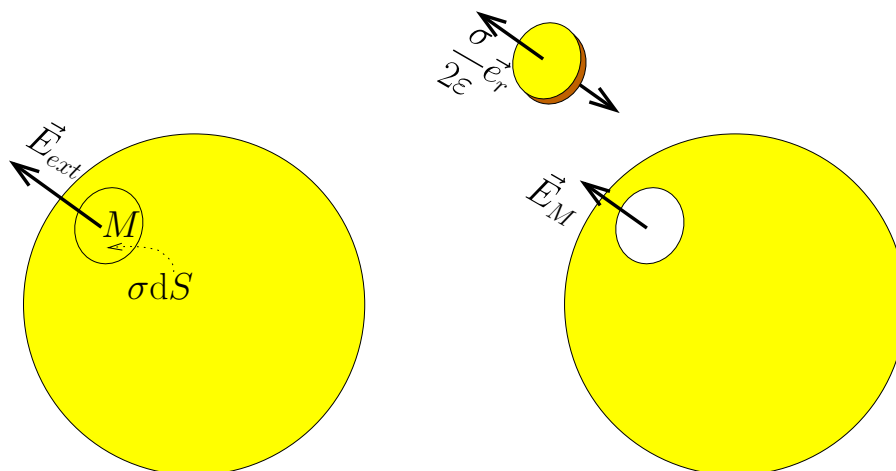
$$\mathcal{L}_s = (V_1 - V_2) \int_0^q dq = (V_1 - V_2)q = 2E_p.$$

On trouve donc

$$\vec{F} = +\vec{\nabla} E_p. \quad (18)$$

4 Pression électrostatique

Exemple de la sphère.



Considérons une sphère conductrice avec une charge surfacique σ . D'après le théorème de Coulomb on sait que le champs à la surface vaut $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r$ et qu'il est nul à l'intérieur du conducteur.

Nous évaluons la force électrostatique $d\vec{F}$ qui s'applique à la charge $dq = \sigma dS$:

$$d\vec{F} = dq \vec{E}_M,$$

\vec{E}_M étant le champ au point M créé par toutes les charges existantes sur le conducteur, à l'exception de la charge dq . En exploitant le principe de superposition on déduit que

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{ext} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_r,$$

et donc que ce champ exerce sur la charge dq une force électrostatique

$$d\vec{F} = dq \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{e}_r.$$

Le terme $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ est une force par unité de surface, c'est à dire une pression, *la pression électrostatique*.

5 Annexe : Méthode des charges images

Le problème à résoudre :

Calculer le potentiel et le champ électrostatique pour un système donné (le système A).

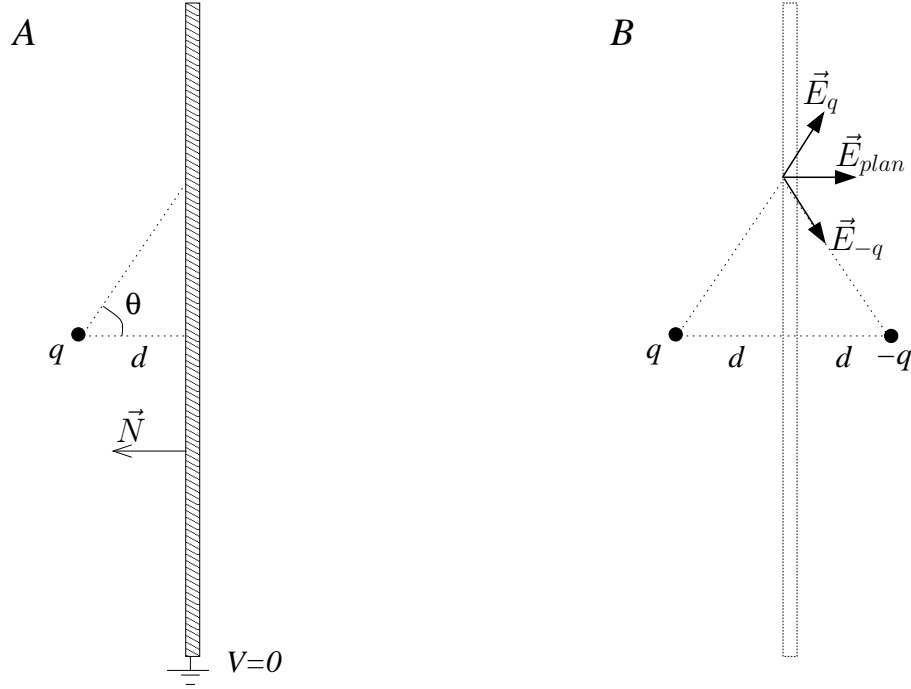
La méthode :

Trouver un système B qui est décrit par la même équation de Poisson/Laplace pour le potentiel et qui a les mêmes conditions au bord que le système A .

Exemple. Une charge q , $q > 0$ est placée à une distance d d'un plan conducteur relié à la terre ($V_{plan} = 0$). Déterminer :

- (a) le champ à proximité du plan conducteur ;
- (b) la distribution surfacique σ sur le plan, en fonction de l'angle θ (voir schéma) ;
- (c) la force exercée par le plan sur la charge.

Solution :



Le système B est un système sans le plan conducteur, avec une charge $-q$ située symétriquement par rapport au plan. La région à gauche du plan est décrite par la même équation pour le potentiel (la distribution des charges est la même) pour les systèmes A et B , et la condition au bord $V_{plan} = 0$ est bien vérifiée dans le système B grâce à la charge *image* $-q$.

- (a) $\vec{E}_{plan} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q} = \frac{-q \cos^3 \theta}{2\pi\epsilon_0 d^2} \vec{N}$
- (b) $\vec{E}_{plan} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$. Donc $\sigma = \frac{-q \cos^3 \theta}{2\pi d^2}$
- (c) $\vec{F}_{plan \rightarrow q} = \vec{F}_{-q \rightarrow q} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \vec{N}$.