

Les Matrices

Une Matrice $n \times m$ est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes

- Les nombres qui composent la matrice sont appelés les coefficients.
- on note a_{ij} le coefficient de $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$

$$\begin{matrix} \text{Zineb} \\ \text{Haya} \\ \text{Asma} \end{matrix} \begin{pmatrix} 19 & 19 & 9 \\ 20 & 9 & 12 \\ 19 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

$n = \text{nombre de ligne}$
 $m = \text{nombre de colonne}$

Matrice carrée

$$A_{n \times m}$$

la dimension de la matrice est $n \times m$.

$$A_{n \times m} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times m} \quad n = m$$

\rightarrow A matrice carrée.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A une matrice à 3 lignes et 2 colonnes à coefficients dans \mathbb{R} .

$$\text{donc } A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans K est noté par $M_{n,m}(K)$.

Si $n = m \Rightarrow$ La matrice A est dite matrice carrée.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad n = m = 2$$

Si $n = 1 \Rightarrow$ La matrice ligne

$$A = (2 \ 3 \ 5)$$

Si $m = 1 \Rightarrow$ matrice colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matrice Nulle: tous les éléments sont nulle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure: est une matrice carrée tel que:

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure: est une matrice carrée tel que

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonale

Matrice Diagonale.

est une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls. (T supérieure + T inférieure).

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{diagonal} \\ \text{supérieure} \\ \text{inférieure} \end{matrix}$$

Matrice Identité I_n

est une matrice carrée dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1. et tous les autres sont égaux à 0.

$$A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egalité de deux matrices:

soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $M_{n,m}(K)$

$A = B$ Tous les éléments de A sont égaux aux éléments correspondants de B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 0 & y+x & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

- Déterminons x et y pour que les deux matrices soient égales.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y + x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

Transposée d'une matrice:

$A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n,m}$. on appelle transposée de A la matrice (a_{ji}) de $M_{m,n}$ et on note ${}^tA = (a_{ji})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somme de deux matrices:

Addition: (إضافة)

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $m \times n$.

leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $m \times n$ définie par:

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \rightarrow \text{فقط المصفوفة}$$

Ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Soustraction de matrices: (طرح)

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times m$.

leur soustraction $C = A - B$ est la matrice de taille $n \times m$ définie par:

$$C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire: (ضرب)
le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ par un scalaire α est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α est notée αA .

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha = 2$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplication de matrices: (ضرب)

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n \times m}(K)$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de $M_{m \times p}(K)$.

le produit de matrices A et B est la matrice $A \times B$ de $M_{n \times p}(K)$ définie par:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \times b_{kj}$$

الضرب المصفوفي

الضرب المصفوفي

الضرب المصفوفي

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + a_{im}b_{mj}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la taille du produit: $n \times p$

n la première

m la deuxième

$$AB = 3 \times 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = AB$$

$$1 \times 1 + (-1 \times -4) + 0 \times 0 = 5$$

$$1 \times 2 + (-4 \times 1) + 0 \times 1 = -2$$

$$2 \times 1 + 0 \times -1 + 1 \times 0 = 2$$

$$2 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 5$$

$$3 \times 1 + -1 \times -2 + 0 \times 0 = 5$$

$$3 \times 2 + 1 \times -2 + 0 \times 1 = 4$$

$$B \times A = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3x2

3x3

→ impossible

o donc on ne peut pas faire la multiplication de $B \times A$.

Attention

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Ex2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 1 + -1 \times 2 = 0$$

$$2 \times 1 + -1 \times 3 = -1$$

$$2 \times 2 + -1 \times 1 = 3$$

$$1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$$

$$1 \times 1 + 1 \times 3 = 4$$

$$1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$$

$$3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$$

$$3 \times 1 + 2 \times 3 = 9$$

$$3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$$

o le produit matriciel n'est pas commutatif.

$$AB \neq BA$$

o puissance d'une matrice

on définit les puissances successives de A par

$$A^P = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{P \text{ fois}}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ Calculer } A^2 \text{ et } A^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A^2$$

$$\begin{array}{l} 0 \times 0 + 1 \times 2 = 2 \\ 0 \times 1 + 1 \times -1 = -1 \\ 2 \times 0 + -1 \times 2 = -2 \\ 2 \times 1 + -1 \times -1 = 3 \end{array}$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$= A^2 \times A$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = A^3$$

$$2 \times 0 + -1 \times 2 = -2$$

$$2 \times 1 + -1 \times -1 = 3$$

$$-2 \times 0 + 3 \times 2 = 6$$

$$-2 \times 1 + 3 \times -1 = -5$$

o Inversion d'une matrice :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $M_n(K)$
on dit que A est inversible s'il existe
une matrice B de $M_n(K)$ telle que
 $AB = BA = I_n$. on note :

$$A^{-1} = B$$

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times (-1) & 2 \times (-5) + 5 \times 2 \\ 1 \times 3 + 3 \times (-1) & 1 \times (-5) + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + (-5) \times 1 & 3 \times 5 + (-5) \times 3 \\ (-1) \times 2 + 2 \times 1 & (-1) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow La matrice A est donc inversible d'inverse

$$B \cdot A^{-1} = B$$

o Transposée d'une matrice :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n,m}(K)$
on appelle transposée de A la matrice
 a_{ij} de $M_{m,n}(K)$ et on note ${}^t A$

$${}^t A = (a_{ij})$$

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$({}^t A)^t = A$$

o Une matrice carrée inversible

$$({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

o A, B deux matrices carrées inversibles de même dimension

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

o Montrer que $(B^{-1} A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1} A^{-1}) = I$

ona :

$$(B^{-1} A^{-1})(AB) = B^{-1}(A \cdot A^{-1})B = B^{-1}IB \cdot B^{-1}B = I$$

et ona

$$(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

o Une matrice carrée d'ordre deux définite par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$ad - cb \neq 0$$

$\Rightarrow A$ est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & -\frac{b}{ad-cb} \\ -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{cof}^t(A) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{cof} A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} d & c \\ c & b \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} d & a \\ c & a \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} b & a \\ a & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comatrice

A^{-1} par l'utilisation de la comatrice

o Méthode de Gauss pour inverser une matrice

Déterminer l'inverse de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A/I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique

Une matrice carrée on dit que A est

Symétrique si $A^t = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = A^t \Rightarrow A$ est symétrique

Matrice antisymétrique

$A^t = -A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = -A$$

donc A Antisymétrique

Les éléments de la diagonale d'une matrice antisymétrique sont nécessairement nuls.

Trace d'une matrice

une matrice carrée on définit la trace de M. comme étant la somme des éléments de la diagonale

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr}(A) = 1 + 0 + 2 = 3$$

$$\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$$

o Déterminant:

1/ Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2:

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ une Matrice de $M_2(K)$.
on appelle déterminant de A , le nombre noté $\det A$ ou $|A|$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \times 7 - 5 \times 4 = 1$$

2/ Déterminant d'une Matrice carrée d'ordre 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

lignes 2 et 3
colonnes 2 et 3

$$\det(A) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= +1(1 \times 1 - 0 \times 4) - 3(0 \times 1 - (-3 \times 0)) - 2(0 \times 4 - (-3 \times 1)) = -5$$

$$= -5$$

$$0 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

la ligne de la 1ère colonne
à la 1ère ligne

$$= +2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +2(-3 - (-4))$$

$$= +2(-3 + 4) = +2(1) = 2$$

$$\det A = -14$$

$$0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

\Rightarrow Si A possède une ligne ou colonne de '0'
 $\Rightarrow \det(A) = 0$

$$0 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$L_1 = -2L_3$$

\Rightarrow Si A possède deux lignes ou colonnes proportionnelles $\Rightarrow \det(A) = 0$

$$0 \begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 & 7 \\ 0 & -1 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-1)(1)(-2) = 4$$

le produit de la diagonale.

\Rightarrow Si A est triangulaire $\Rightarrow \det(A) =$
(sup ou inf)

$$\Rightarrow \det(A) = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \dots$$

$$0 \left| \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = (3)(-1)(2) = -6.$$

$$0 \det(I) = 1 \quad 0 \det({}^t A) = \det(A)$$

identité ← transposée ←

$$0 \det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

⇒ A et B même dimension

$$0 A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

$$0 \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Les Matrices et les applications linéaires

Matrice associée à une application linéaire

$$A. L. f: E_m \rightarrow E_n \text{ symétrique de } f$$

E de départ H(f)

0 si la base de E_n est $B_e = \{e_1, \dots, e_n\}$
et celle de E_m est $B_u = \{u_1, \dots, u_m\}$
Alors:

$$M(f, B_e, B_u) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 & & u_m \end{pmatrix}$$

Exemple.

Soit $E_3 = \mathbb{R}^3$ et $E_2 = \mathbb{R}^2$.

Soit l'app linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (2x + z, x + y + z)$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow B_e = (e_1, e_2, e_3).$$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1).$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow B_u = (e'_1, e'_2)$$

$$e'_1 = (1, 0) \quad e'_2 = (0, 1).$$

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 1) = (2, 0) + (0, 1) = 2e'_1 + e'_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1) = 0 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 1) = 1(1, 0) + (0, 1)$$

$$M(f, B_e, B_u) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \end{matrix}$$

$$x \mapsto y, y \mapsto x, z \mapsto x + y + z$$

$$(2x + z, x + y + z)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x \mapsto y, y \mapsto x, z \mapsto x + y + z$$

$$0 g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \rightarrow B_u = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) \quad e'_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$e'_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$e'_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$e'_4 = (0, 0, 0, 1)$$

$$M(g, B_u, B_u) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ e'_4 \end{matrix}$$

$$f(e_1) = f(1, 0) = (1, 1, 1, 0) = e'_1 + e'_2 + e'_3 + 0e'_4$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (1, -1, 0, 1) = e'_1 - e'_2 + 0e'_3 + 1e'_4$$

$$0 f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, x + 2y - z, x - z)$$

$$M(f, B_e, B_e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ inversible

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+3z \\ 2x+4y \\ 5x-3y+z \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x+y+3z, 2x+4y, 5x-3y+z)$$

$$\circ M_{B_E} B_0 (g \circ f) = B \times A$$

~~Matrice de passage~~

Expression matricielle d'une application linéaire:

Ex: $f: E_3 \rightarrow E_3$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3) = (y_1, y_2)$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

coordonnée de $f(x)$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ \rightarrow coordonnée de x

Matrice de f

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

$$[2, 3] [3, 1]$$

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \rightarrow (2x+3, x+y+z) = (y_1, y_2)$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3 \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

$$U = (1, 0, 2)$$

$$f(0)??$$

$$f = x \rightarrow y \Leftrightarrow y = M(f) \cdot x$$

coordonnée de x \rightarrow $M(f)$ \rightarrow coordonnée de y

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

~~Changement de base~~ / Matrice de passage

Ex:

soit E_3 une v. $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ base de E_3

$$B_2 = (U_1, U_2, U_3) / \begin{cases} U_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ U_2 = e_2 - 2e_3 \\ U_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

\rightarrow la nouvelle de E_3

La matrice de passage de la base $B_1 \rightarrow B_2$

$$P_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} B_1$$

Les applications linéaires

Déf.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} .
Une application f de E dans F est une application linéaire si et si

$$\Rightarrow \forall x, y \in E: f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$\mathcal{L}(E, F) = \{f / f \text{ linéaire}\}$$

$$f \in \mathcal{L}(E, F)$$

on dit aussi que f est une morphisme d'espaces vectoriels.

Remarque:

Si $f: E \rightarrow F$ une application linéaire alors:

1. $f(0_E) = 0_F$ (donc pour démontrer qu'une application f n'est pas linéaire, il suffit de démontrer que $f(0_E) \neq 0_F$)

2. كيا نقول ان f خطية - App Line - نزو لورقة

الوسيلة لنضرب $f(0_E)$ في 0_F اذا القينا صفة نزو لورقة الابانة ونضرب السر صافي

و اذا القينا $f(0_E) \neq 0_F$ نزو لورقة لندبر ان نقول ان f خطية غير صافي

$$2) \forall u \in E: f(-u) = -f(u)$$

نضرب في -1 في $f(u)$ - $f(-u) = -f(u)$ - $f(u) = -f(-u)$

Exemples

est ce que les applications sont linéaires?

$$1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (-2x, y + 3z)$$

Exp de départ \rightarrow Espace d'arrivée
نضرب في -1 في $f(u)$ - $f(-u) = -f(u)$ - $f(u) = -f(-u)$

$$0 \quad f(0_E) = 0_F \quad \text{نضرب في -1 في $f(u)$ - $f(-u) = -f(u)$ - $f(u) = -f(-u)$ }$$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$f(0, 0, 0) = (-2(0), 0 + 3(0)) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2} \checkmark$$

$$1) \forall u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$$

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$f(u+v) = f\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}\right) = (-2(x+x'), (y+y') + 3(z+z'))$$

$$\Rightarrow = (-2x - 2x', y + y' + 3z + 3z')$$

$$= (-2x, y + 3z) + (-2x', y' + 3z')$$

$$= f(u) + f(v) \checkmark$$

$$2) \forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

$$f(\lambda u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$= (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z)$$

$$= \lambda (-2x, y + 3z)$$

$$= \lambda f(u)$$

f est linéaire.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x+y, y-z, x+z).$$

① - $\text{Im } f$

$$\text{Im } f = \{ f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \text{Vect} \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$$

$$e_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = v_1$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \Rightarrow f(0, 1, 0) = (1, 1, 0) = v_2$$

$$e_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow f(0, 0, 1) = (0, -1, 1) = v_3$$

$$\text{Im } f = \text{Vect} \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1) \rangle$$

③ - La base: vecteurs **libres** + **générateurs**.

Astuce: **libre** + **générateurs**.

إذا كانت علاقة بين المتجهات مباشرة

فأولها **libre** (أي **libre**).

$$v_3 = v_1 - v_2 \Rightarrow \text{donc } \{v_1, v_2, v_3\} \text{ sont liés.}$$

alors $\{v_1, v_2\}$ sont **libres**.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$|\lambda_2 = 0|$$

$$|\lambda_1 = 0|$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\} \text{ libres}$$

Générateurs

Les vecteurs (v_1, v_2) combinés sont les vecteurs de l'espace.

et comme v_1, v_2 sont combinés sont les vecteurs de \mathbb{R}^3 alors $\{v_1, v_2\}$ sont **générateurs**.

donc $\{v_1, v_2\}$ base de $\text{Im } f$.

$$v = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

④ - **Dimension** base v_1, v_2

$$\dim \text{Im } f = 2.$$

② - **Surjectivité**

$$\text{Im } f = f$$

$$\dim f, \dim \text{Im } f$$

إذا كانت متساوية بين أولها **libre** + **générateurs**.

surjectivité.

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\dim \text{Im } f \neq \dim \mathbb{R}^3$$

$$\dim \text{Im } f \neq \dim \mathbb{R}^3$$

$$\text{donc } \text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$$

alors f n'est pas **surjective**.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x + 3y, y + 2z).$$

① - Im f:

$$\text{Im } f = \{ f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

$$\text{Im } f = \text{Vect} \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$$

$$e_1 = (1, 0, 0) \Rightarrow f(1, 0, 0) = (2, 0) = v_1$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \Rightarrow f(0, 1, 0) = (3, 1) = v_2$$

$$e_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow f(0, 0, 1) = (0, 2) = v_3.$$

$$\text{Im } f = \text{Vect} \langle (2, 0), (3, 1), (0, 2) \rangle$$

2 axes

$$\text{Im } f = x(2, 0) + y(3, 1) + z(0, 2)$$

3 axes
2 axes
x, y, z

$$\text{Im } f = \text{Vect} \langle \dots \rangle$$

② - la base:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 & \text{--- (1)} \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_1 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = -2\lambda_3$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ sont liés.

alors $\{v_1, v_2\}$ sont libres.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda_1 + 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

donc $\{v_1, v_2\}$ libre.

③ généralité:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (x, y).$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3y = x \\ \lambda_2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = x - 3y \\ \lambda_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y \\ \lambda_2 = y \end{cases}$$

donc $\{v_1, v_2\}$ généralité.

④ Dim Im f = 2

$$\text{Dim } \mathbb{R}^2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Dim Im } f = \text{Dim } \mathbb{R}^2.$$

$$\text{donc Im } f = \mathbb{R}^2$$

donc f est surjective.

4) Rang d'une application linéaire.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire

Déf:

Le rang de f est égale la dimension de $\text{Im } f$
on écrit :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f).$$

Théorème:

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker } f.$$

Rang

① - Définition de $\text{Im } f$

② - $\text{Ker } f \leftarrow \text{Im } f$

③ - $\text{Im } f$, \dim , $\text{rg}(f)$

Proposition

f est bijective si f est injective et surjective

ona: f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$

f surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$

Propriétés:

• f est endomorphisme si $E = F$ (6)

• f est isomorphisme si f est bijective

• f est automorphisme si $E = F$ et f bijective

Exemple:

$$1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: f(x, y, z) = (2x + 8y - 3z, x - y).$$

• Déterminer $\text{Ker } f$ et le rang f

• f est elle bijective?

$$|E - F = \mathbb{R}^3|$$

Application endomorphisme

① - $\text{Ker } f$:

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y - z = 0 \Rightarrow z = y \Rightarrow z = 0 \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Vect} \langle (0, 0, 0) \rangle$$

② - $\dim \text{Ker } f$:

$$\text{Ker } f \text{ n'est pas une base} = 0_{\mathbb{R}^3} (0, 0, 0).$$

$$\dim \text{Ker } f = 0.$$

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim \text{Ker } f.$$

$$\dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f$$

$$= 3 - 0$$

$$\boxed{\text{rg}(f) = 3}$$

• f est bijective } injective + surjective

\Rightarrow Injective:

comme $\text{Ker } f = 0_{\mathbb{R}^3}$ Alors f est injective.

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) = 3.$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$$

\Rightarrow donc $\text{Im } f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Alors f est surjective

Donc f est bijective.