

Feuille de TD No 4

<http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2>
mustapha.chellali@gmail.com

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(K)$. Soit $D = \{(x, y) \in K^2 \mid gx + hy + i = 0\}$. Soit
- $$f_A : K^2 \setminus D \longrightarrow K^2 \quad (x, y) \longmapsto \left(\frac{ax + by + c}{gx + hy + i}, \frac{dx + ey + f}{gx + hy + i} \right)$$
- Montrer que pour $A, B \in M_3(K)$ et $(x, y) \in K^2$, si $f_A \circ f_B((x, y))$ est défini, alors :

$$f_A \circ f_B((x, y)) = f_{AB}((x, y))$$

2. Soit A, B, C des matrices respectivement $(m, n), (p, q)$ et (r, s) sur K . A quel condition sur m, n, p, q, r, s ABC et ACB sont définies ?
Quelles sont alors les tailles de ABC et ACB ?
3. Soit $M = (a_{ij}) \in M_n(K)$ une matrice carrée. On appelle trace de M le scalaire $\sum_{i=1}^n a_{ii}$. On le note $tr(M)$.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Comparer $tr(AB)$ et $tr(BA)$

4. Soit A, B des matrices respectivement (m, n) et (p, q) sur K . tel que AB et BA sont définies. Montrer que :

$$tr(AB) = tr(BA)$$

5. Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 2a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

6. On considère les déterminants δ_n suivants. Ecrire une relation entre δ_n, δ_{n-1} et éventuellement δ_{n-2} . En déduire l'expression de δ_n (Calculer $\delta_n, n = 0, 1, 2, 3, 4$ et faire une hypothèse de récurrence)

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 & 5 \end{array} \right|$$

7. I_2 et I_3 étant respectivement les matrices identités $(2, 2)$ et $(3, 3)$, avec les notations de l'exercice 3, comparer $\det(I_2 - AB)$ et $\det(I_3 - BA)$
8. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

En déduire l'expression de A^n et e^{tA}